Комплексные числа в задачах планиметрии

М.С. Петрова

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Зачем нужны комплексные числа?

В средней школе вы узнали о новом виде уравнений — квадратные уравнения. Для их решения вы использовали всем известную формулу дискриминанта: $D = b^2 - 4ac$. Однако, когда дискриминат был меньше нуля, вам говорили, что уравнение не имеет корней. Но это не так! Внесём маленькую поправку: уравнение в данном случе не имеет *действительных* корней.

Как же тогда решать такие уравнеия? Ответ прост: с помощью комплексных чисел.

Комплексные числа — это новое множество чисел, которое содержит в себе множество вещественных чисел. Особенно часто применяются формулы комплексного переменного, в частности, аналитические функции: они используются в механике, аэро- и гидродинамике, в алгебраической и неевклидовой геометрии, теории чисел.

Вместе с тем алгебру комплексных чисел можно успешно использовать и в более простых разделах математики: элементарной геометрии, тригонометрии, теории движений и подобий, аффиных и круговых преобразований, а также в различных механических и физических задачах.

Данное пособие поможет читателю разобраться с основными свойствами комплексных чисел и их применением на практике. В данной книге содержатся два раздела, один из которых расскажет об арифметических действиях над комплексными числами, а второй — о применении комплексных чисел в планиметрии.

1 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1.1 Основные отличия комплексных чисел от вещественных

Комплексные числа имеют следующий ряд отличий от вещественных чисел:

- Комплексные числа нельзя сравнить на больше/меньше, однако комплексные числа можно сравнить на равно/не равно.

  Два комплексных числа будут равны только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части.

- Любой многочлен с вещественными или комплексными коэффициентами с учётом кратности имеет столько корней, какова его степень.

- Для комплексных чисел возможно извлечение корня из любого числа любой степени. Комплексный корень n-ой степени из ненулевого числа имеет n различных комплексных значений.

1.2 Что такое комплексное число?

Рассмотрим уравнение $x^2+1=0$ или $x^2=-1$. Число, квадрат которого равен -1, называется мнимой единицей и обозначается буквой i.

$$i^2=-1 \Rightarrow i=\sqrt{-1}$$

Таким образом, $z=x+iy$ — алгебраическая форма комплексного числа, где x, y — действительные числа. Если x равен 0, то $z=iy$ — чисто мнимое число.

Так же как и для вещественных чисел, для комплексных чисел определены операции сложения, вычитания, умножения и деления.

- $z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$
- $z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i$
- $z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_2y_1+x_1y_2)i$
- $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i$

степени числа i

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = i^2 \cdot i = -i, i^4 = (i^2)^2 = 1,$$

таким образом,

$$i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, i^{4n} = 1, n \in N$$

Задачи для самостоятельного решения
1.Найти значения выражений:
а) $(3+5i)+(7-2i)$
б) $(5-4i)+(7+4i)$
в) $(5-4i)-(6+2i)$
г) $-i+(1-i)$
д) $i^{15}-(15+i)$
е) $(2+3i)(3-2i)+(2-3i)(3+2i)$
ж) $i(4-8i)$
з) $\dfrac{1+6i}{1-2i}$
и) $\dfrac{1}{1-i}$
к) i^{31}
л) $i^3+i^{13}+i^{23}+i^{33}+i^{43}+i^{53}$

1.3 Решение уравнений

Главное преимущество комплексных чисел заключается в том, что с их помощью можно находить все корни квадратных уравнений.

Для начала рассмотрим квадратное уравнение с действительными коэффициентами a, b, c и отрицательным дискриминантом:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D < 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D = -d^2 (d > 0)$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-d^2}}{2a} = \frac{-b \pm di}{2a}$$

На множестве комплексных чисел квадратный корень из любого действительного числа кроме нуля имеет два значения $\sqrt{-9} = \pm 3i$.

ПРИМЕР

$$x^2 + 3x + 3 = 0$$

$$D = -3$$

$$x_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\dfrac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

Перейдём к уравнениям с комплексными коэффициентами. У квадратного уравнения с комплексными коэффициентами a, b, c будет комплексный дискриминант.

Для вычисления комплексного дискриминанта воспользуемся следующей формулой:

$$\sqrt{x+iy} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} + i\frac{y}{|y|}\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\right).$$

Однако данная формула для записи очень неудобна, поэтому найти корень из комплексного можно с помощью системы двух уравнений.

$$z^2 = a + ib, z \in C$$

$$z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$\Rightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = a + bi$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

ПРИМЕР

$$\sqrt{3-4i} = ?$$

$$\sqrt{3-4i} = x + iy$$

$$3 - 4i = (x+yi)^2$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4. \end{cases}$$

Решая систему, получаем, что $x = 2, y = -1$ или $x = -2, y = 1$, откуда

$$z = \pm(2 - i).$$

Теперь расмотрим непосредственно квадратное уравнение с комплексными коэффициентами.

$$z^2 - iz - 1 + i = 0$$
$$z_{1,2} = \frac{i \pm \sqrt{(-i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1+i)}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{3-4i}}{2}.$$

Рассмотрим следующий вид уравнений на примере $(1+i)z = 3-i$. Данное уравнение имеет два способа решения.

1 СПОСОБ

Пусть $z = x + iy$

$$\Rightarrow (1+i)(x+iy) = x + iy + ix + i^2y = (x-y) + (x+y)i$$
$$\Rightarrow (x-y) + (x+y)i = 3 - i$$
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = -1. \end{cases}$$
$$\Rightarrow x = 1, y = -2$$
$$z = 1 - 2i$$

2 СПОСОБ

$$(1+i)z = 3 - i| \quad \cdot (1-i)$$
$$(1+i)(1-i)z = (3-i)(1-i)$$
$$(1-i^2)z = 3 - 3i - i + i^2$$
$$2z = 2 - 4i$$
$$z = 1 - 2i$$

Глядя на второй способ решения, можно вывести следующую формулу для решения подобных уравнений:

$$(c-di)(c+di) = (c-di)(a+bi)$$
$$(c^2 - (di)^2)z = ac - (di)a + (bi)c - bdi^2$$
$$(c^2 + d^2)z = (ac+bd)(bc-ad)i$$

Задачи для самостоятельного решения

1.Решите уравнения:

а) $x^2 - 2x + 17 = 0$

б) $x^2 + 6x + 18 = 0$

2.Решите уравнения, где z — комплексное число:

а) $iz = (1-i)$

б) $(1+i)^2z = (1-i)^3$

3.Вычислите:

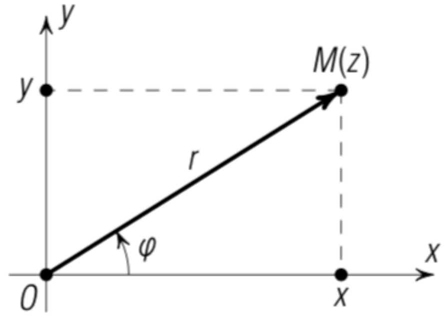
а) $\sqrt{15+8i}$

б) $\sqrt{24-7i}$

в) $\sqrt{40+9i}$

1.4 Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Введение в систему координат

Комплексные числа можно также представить на плоскости с прямоугольной системой координат.



Каждому комплексному числу вида $z = x + iy$ можно поставить в соответствие точку M на плоскости с координатами $(x; y)$.

- При $y = 0$ число действительное и изображается точками на оси Ox
- При $x = 0$ число чисто мнимое и изображается точками на оси Oy

  Модуль комплексного числа — расстояние от начальной точки O до точки $M(z)$, обозначатся $|z|$ или r.

$$|z| = r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Рассмотрим свойства модуля $|z|$:

- $|z| \geq 0$
- $|-z| = |z|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Обратимся ещё раз к рисунку комплексной плоскости:
φ — ориентированный угол, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$
Угол φ называется аргументом комплексного числа и обозначается $\mathrm{Arg}(z)$, измеряется в радианах.

Из этого следует, что:

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}, \ \ \cos\varphi = \frac{x}{r}, \ \ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

откуда $x = r\cos\varphi, \;\; y = r\sin\varphi$.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Для комплексного нуля значение аргумента не определено, однако для ненулевого числа z аргумент определяется с точностью до $2\pi k; k \in Z$.

Рассмотрим свойства аргумента.

- Аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей:
$$\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$$
- Аргумент частного от деления равен разности аргументов делимого и делителя:
$$\mathrm{Arg}(z_1/z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2)$$
- Аргумент обратного числа отличается знаком от аргумента исходного:
$$\mathrm{Arg}(1/z) = \text{-}\mathrm{Arg}(z)$$

Сопряжённые числа

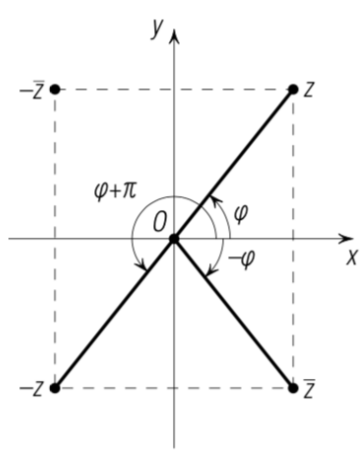
Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, сопряжённое данному.

$$\overline{z} = x - iy$$

На комплексной плоскости сопряжённые числа получаются благодаря зеркальному отображению друг друга относительно вещественной оси.

Модуль сопряжённого числа равен модулю исходного числа, однако их аргументы отличаются.

$$|\overline{z}| = |z|, \;\; \mathrm{Arg}\,\overline{z} = \text{-}\mathrm{Arg}(z)$$



- Точки с комплексными координатами z и $-z$ симметричны относительно начала координат O.
- Точки с комплексными координатами z и $-\overline{z}$ симметричны относительно оси Oy.

Рассмотри два равенства:

1) $z = \overline{z}$: числа, равные своим сопряжённым, являются действительными ($y = 0$).

2) $z = -\overline{z}$: числа, для которых верно данное равенство, являются чисто мнимыми ($x = 0$).

$$|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$$

Свойства сопряжённых чисел

- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ — произведение комплексно-сопряжённых чисел — неотрицательное вещественное число.
- $z + \overline{z} = 2x$ — сумма комплексно-сопряжённых чисел — вещественное число.
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите модуль комплексного числа:

а) $20 - 19i$

б) $i(i-1)$

в) $-\dfrac{10}{i}$

г) $\dfrac{i-1}{i}$

2. Решите системы уравнений:

$\begin{cases} 5z_1 - 3\overline{z_2} = -9 + 5i \\ 4\overline{z_1} + z_2 = 3 - 4i. \end{cases}$ $\begin{cases} i\overline{z_1} - 2z_2 = 3 + 8i \\ 2iz_1 + \overline{z_2} = 7i. \end{cases}$

3. Если $z_1 = 3 + i2, z_2 = -2 + 3i$, найдите:

а) $\dfrac{z_1 - z_2}{z_1}$

б) $\dfrac{(z_1 + z_2)^2}{\overline{z_1} - \overline{z_2}}$

в) $\dfrac{z_2 - 2\overline{z_1}}{(\overline{z_2} + z_1)^3}$

4. Докажите, что $|a - b| \le |a| + |b|$, где a и b любые комплексных числа.

5. Докажите, что если у уравнения $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0 = 0$ с действительными коэффициентами имеется комплексный корень, то и число сопряжённое этому корню, также является корнем уравнения.

1.5 Тригонометрическая форма записи комплексного числа

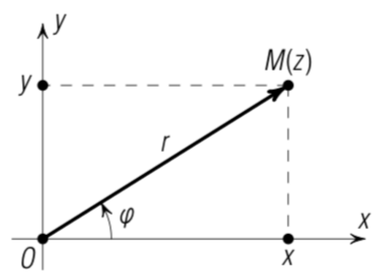
Комплексное число $z = x + iy$ изображается в виде вектора $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{z}$ с началом в точке O и концом в точке $z = x + iy$.

Угол φ между действительной осью Ox и вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый от положительного направления действительной оси, называется аргументом комплексного числа $z \neq 0$.

- Если отсчёт ведётся против часовой стрелки, то величина угла положительна.

- Если отсчёт ведётся по движению часовой стрелки, то величина угла отрицательна.

Любое комплексное число $z \neq 0$ имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. В качестве ограничивающего промежутка принято брать промежуток $(\pi; \pi]$.



$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi k, k \in Z$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi, \varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Чтобы представить комплексное число в тригонометрической форме, необходимо найти:

1. Модуль этого числа $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Выбрать нужное значение аргумента числа.
3. Записать $z = x + iy$, воспользовавшись формулами

$$x = r \cos \varphi, \;\; y = r \sin \varphi.$$

4. Записать комплексное число в тригонометрической форме с помощью формулы $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

ПРИМЕР:

1) Представьте в тригонометрической форме число 1.

$$|1| = 1; \operatorname{Arg} z = 0 \Rightarrow 1 = \cos 0 + i \sin 0$$

2) Представьте в тригонометрической форме число $1+\sqrt{3}$.

$$|z| = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = 2; \operatorname{Arg} z = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Стоит заметить, что в тригономентической форме не может быть знака минус, а также не могут быть разные аргументы.

Задачи для самостоятельного решения

1. Представьте в тригонометрической форме числа:

а) -8

б) 0

в) i

г) $z = -1 + i$

д) $1 + \dfrac{1}{i}$

е) $\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$

ж) $\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}$

1.6 Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

В этом пункте будут рассмотрены основные операции, проводимые над комплексными числами, в тригонометрической форме.

Умножение

При умножении двух или нескольких комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

$$r_1(cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Деление

При делении двух комплексных чисел модуль числителя делится на модуль знаменателя, а аргумент знаменателя вычитается из аргумента числителя.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2).$$

Формула Муавра

При возведении комплексного числа в целую положительную степень модуль его возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

$$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), n\in N.$$

Извлечение корней n-ой степени

Каждое комплексное число, отличное от нуля, имеет ровно n корней n-ой степени

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right);\ \ k=0,1,2...,n-1.$$

ПРИМЕР

1. $z_1=(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}), z_2=(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$
$z_1\cdot z_2=(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12})+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}))=(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $z_1=10(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}), z_2=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$
$\frac{z_1}{z_2}=\frac{10}{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4})+isin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}))=5(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=5i$

3. $z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$
$z^6=2^6(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^6=2^6(\cos\pi+i\sin\pi)=-2^6$

4. $\sqrt[3]{1}=?$
$1=\cos 0+i\sin 0, z_k=\sqrt[3]{1}=(\cos\frac{0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{0+2\pi k}{3})$
$k=0;1;2$
$k=0\Rightarrow z_0=\cos 0+i\sin 0=1$
$k=1\Rightarrow z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
$k=2\Rightarrow z_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Задачи для самостоятельного решения
1. Найдите Произведение чисел $z_1\cdot z_2$:
$z_1=2(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}), z_2=5(\cos(-\dfrac{\pi}{4})+i\sin(-\dfrac{\pi}{4}))$
2. Найдите частное чисел z_1/z_2:
$z_1=8(\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\sin\dfrac{7\pi}{12}), z_2=4(\cos(-\dfrac{\pi}{4})+i\sin(-\dfrac{\pi}{4}))$
3. Найти значения:
а) $\sqrt[3]{-8}$
б) $\sqrt[4]{\frac{-18}{1+i\sqrt{3}}}$
в) $\sqrt[4]{i}$

4. Решите уравнение:
$z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

1.7 Показательная форма комплексного числа

Любое комплексное число можно представить в виде $z = re^{i\varphi}$.

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

Эта запись является показательной формой комплексного числа.

ПРИМЕР

1. Запишите в показательной форме число $z = -1 + i$.
$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
$\varphi = \operatorname{Arg} z = \pi + arctg\dfrac{1}{-1} = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$
$\Rightarrow z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$

2. Представьте в алгебраической форме число $z = e^{\frac{\pi}{2}i}$
$z = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = 0 + 1i = i$
$\Rightarrow z = i$

Арифметические действия со степенями с комплексными показателями выполняются так же, как и со степенями с действительными показателями.

- $z_1 \cdot z_2 = (r_1e^{i\varphi_1})(r_2e^{i\varphi_2}) = r_1r_2e^{(\varphi_1+\varphi_2)i}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{(\varphi_1-\varphi_2)i}$
- $z^n = (re^{\varphi i})^n = r^ne^{n\varphi i}$

Задачи для самостоятельного решения
1. Представьте в алгебраической форме комплексные числа:
а) $e^{\pi i}$
б) $2e^{i\frac{\pi}{4}}$
в) $4e^{-\frac{\pi}{6}i}$
г) $e^{-\pi i}$
2. Представьте в показательной форме числа:
а) $1 - i$
б) $-1 + i\sqrt{3}$
в) $-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$
3. Найдите произведение чисел:
а) $e^{\pi i}$ и $2e^{-\frac{\pi}{4}i}$
б) $\sqrt{3}e^{\frac{2\pi}{3}}$ и $e^{-\frac{\pi}{2}i}$
4. Найдите частное чисел:
а)$\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$ и $e^{-\frac{2\pi}{3}i}$
б) $2e^{-\frac{\pi}{4}i}$ и $e^{-\pi i}$

2 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ЗАДАЧАХ ПЛАНИМЕТРИИ

2.1 Векторы в комплексной плоскости

Для того чтобы перейти к решению планиметрических задач с помощью комплексных чисел, нужно для начала изучить векторы на комплексной плоскости.

- **Скалярное произведение векторов**

  Пусть даны два вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Выразим их произведение через комплексные координаты z_1 и z_2 точек A и B соответственно. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

  $$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2)$$

  Если два вектора не берут своё начало в одной точке, то их скалярное произведение будет выглядеть следующим образом:

  $$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}((a-b)(\overline{c}-\overline{d}) + (\overline{a}-\overline{b})(c-d))$$

  ,

  где a, b, c, d — комплексные координаты точек A, B, C, D соответственно.

- **Коллинеарность векторов**

  Пусть на комплексной плоскости заданы точки $A(z_1)$ и $B(z_2)$, отличные от начала координат O. Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ сонаправлены только тогда, когда $\arg z_1 = \arg z_2$, то есть $\arg z_1 - \arg z_2 = \arg \frac{z_1}{z_2} = 0$.

  Эти векторы будут противоположно направлены только в тех случаях, когда

  $$\arg z_1 - \arg z_2 = \arg \frac{z_1}{z_2} = \pm\pi.$$

  Стоит заметить, что комплексные числа с аргументами $0, \pi$ — действительные числа.

  Следовательно, $z_1\overline{z_2} = \overline{z_1}z_2$ — критерий коллинеарности точек O, A, B.

- **Параллельность векторов**

  Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ будут параллельны только в тех случаях, когда

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}}$$

,

где a, b, c, d — комплексные координаты точек A, B, C, D соответственно. То есть отношение $\dfrac{a-b}{c-d}$ — действительное число.

- **Перпендикулярность векторов**

  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, когда $\arg z_1 - \arg z_2 = \arg \dfrac{z_1}{z_2} = \pm\dfrac{\pi}{2}$. Так как комплексные числа с аргументами $\dfrac{\pi}{2}$ и $-\dfrac{\pi}{2}$ чисто мнимы, то $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, когда

  $$z_1\overline{z_2} = -\overline{z_1}z_2.$$

  Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ перпендикулярны, когда

  $$\frac{a-b}{c-d} = -\frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}},$$

  где a, b, c, d — комплексные координаты точек A, B, C, D соответственно. То есть отношение $\dfrac{a-b}{c-d}$ чисто мнимое.

- **Угол между векторами**

  $$\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \frac{(d-c)(\overline{b}-\overline{a}) - (\overline{d}-\overline{c})(b-a)}{2i|d-c| \cdot |b-a|}$$

  $$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \frac{(d-c)(\overline{b}-\overline{a}) + (\overline{d}-\overline{c})(b-a)}{2i|d-c| \cdot |b-a|}$$

2.2 Комплексные координаты точек

1. Расстояние между двумя точками

Пусть даны две точки $A(z_1)$ и $B(z_2)$, следовательно, расстояние между ними будет равно

$$AB^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}).$$

2. Деление отрезка в данном отношении

Пусть дана прямая AB на которой лежит точка C, следовательно, C делит прямую AB в отношении λ. Точке A соответствует координата z_1, точке B соответствует координата z_2, а точке C координата z_3. Следовательно,

$$z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Если $\lambda = 1$, то точка C является серединой отрезка AB, тогда

$$z_3 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

3. Условие принадлежности точек одной прямой

Вернувшись к пункту 2, мы может обозначить $\frac{1}{1+\lambda} = \alpha$ и $\frac{\lambda}{1+\lambda} = \beta$. Следовательно,

$$z_3 = z_1\alpha + z_2\beta,$$

где

$$\alpha + \beta = 1$$

$$\alpha \in R, \beta \in R.$$

Эти условия являются достаточными для того, чтобы три точки принадлежали одной прямой.

2.3 Окружность

Уравнение окружности с центом в точке $O(z_0)$ и радиусом R можно получить из того, что расстояние от любой точки окружности до её центра равно R.

$$R^2 = (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}).$$

1. Точка пересечения секущих и окружности

Чтобы найти комплексную координату точки пересечения секущих AB и CD к единичной окружности $z\overline{z} = 1$, необходимо найти $\overline{z}$ в выражении:

$$\overline{z} = \frac{(a+b) - (c+d)}{ab - cd},$$

где a, b, c, d — комплексные координаты точек A, B, C, D соответственно. Если $AB \perp CD$, то

$$z = \frac{1}{2}(a + b + c + d).$$

2. Точка пересечения касательных к окружности

Чтобы найти комплексную координату точки пересечения касательных к единичной окружности $z\overline{z} = 1$ в её точках A и B, нужно найти z в выражении

$$z = \frac{2ab}{a+b},$$

где a, b — комплексные координаты точек A, B соответственно.

2.4 Треугольник

Площадь положительно ориентированного треугольника ABC равна

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{i}{4}(a(\overline{b} - \overline{c}) + b(\overline{c} - \overline{a}) + c(\overline{a} - \overline{b}).$$

Если этот треугольник вписан в единичную окружность, то площадь будет равна

$$S = \frac{i}{4} \cdot \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}.$$

Подобные и равные треугольники

Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ являются подобными, если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k$ и $\widehat{BAC} = \widehat{B_1A_1C_1}$. В переводе на комплексную плоскость

$$\frac{c_1 - a_1}{c - a} = \frac{b_1 - a_1}{b - a} = \sigma,$$

где a, b, c, a_1, b_1, c_1 — комплексные координаты точек A, B, C, A_1, B_1, C_1 соответственно, а σ — комплексное число, которое является коэффициентом подобия. Если же $|\sigma| = 1$, то эти треугольники равны.

Правильный треугольник

Введём комплексное число $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$, которое является одним из корней уравнения $z^3 = 1$.

Чтобы треугольник ABC был правильным, должно выполняться одно из равенств:

$$a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0$$
$$a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c = 0,$$

где первое равенство соответствует случаю, если треугольник ABC ориентирован положительно, а второе — если ориентирован отрицательно.

Если правльный треугольник ABC вписан в единичную окружность, то предыдущие два равенства принимают вид:

$$a + b + c = 0.$$

Центроид и ортоцентроид треугольника

Комплексная координата f центроида (точка пересечения медиан) треугольника ABC находится по формуле:

$$f = \frac{1}{3}(a + b + c).$$

Комплексная координата p ортоцентроида (точка пересечения высот) треугольника ABC находится по формуле:

$$p = a + b + c.$$

2.5 Четырёхугольник

Площадь положительно ориентированного четырёхугольника $ABCD$ можно найти по формуле:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}}) = \frac{1}{4i}((d-b)(\bar{c} - \bar{a} - (c-a)(\bar{d} - \bar{b})).$$

Если данный четырёхугольник вписан в единичную окружность, то

$$S = \frac{1}{4i} \cdot \frac{(c-a)(d-b)(ac-bd)}{abcd}.$$

Теорема Птолемия

Во вписанном в окружность четырёхугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

Соотношение Бретшнайдера

Для выпуклого четырёхугольника

$$(AC \cdot BD)^2 = (AB \cdot CD)^2 + (BC \cdot AD)^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cos(\widehat{A} + \widehat{C}).$$

2.6 Многоугольник

Чтобы приступить к решению задач с правильными многоугольниками, нужно вспомнить формулу извлечения корня n-ой степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right); k = 0, 1, 2..., n-1$$

Все полученные значения от z_0 до z_{n-1} имеют один и тот же модуль $\sqrt[n]{r}$.

Точки с комплексными координатами $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ являются вершинами правильного n-угольника, который вписан в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в нулевой точке O.

Вершина правльного многоугольника соответствуют комплексные числа

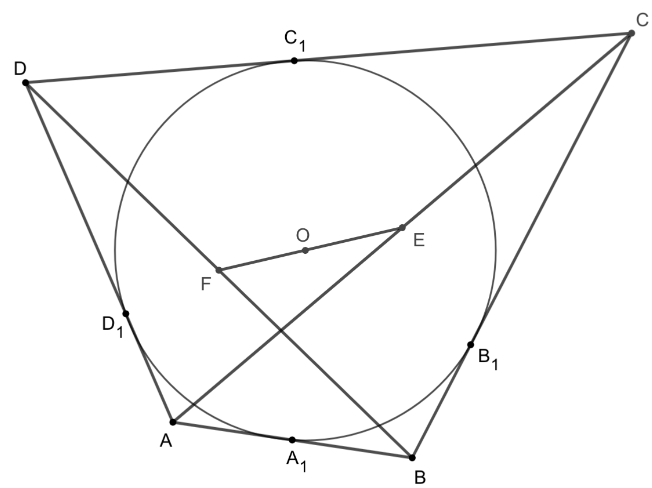
$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{2}, k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

2.7 Классические теоремы

В этом параграфе будут представлены классические теоремы, которые могут помочь в решении планеметрических задач с помощью комплексных чисел.

Теорема Ньютона

В описанном около окружности четырёхугольнике середины диагоналей коллинеарны с центром окружности.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть вокруг четырёхугольника $ABCD$ описана единичная окружность. A_1, B_1, C_1, D_1 — точки касания окружности его сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Следовательно, вершины четырёхугольника будут иметь координаты:

$$a = \frac{2a_1d_1}{a_1+d_1}, \quad b = \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}, \quad c = \frac{2b_1c_1}{b_1+c_1}, \quad d = \frac{2c_1d_1}{c_1+d_1}$$

Точки F и E - середины диагоналей AC и BD соответственно.

$$E = \frac{1}{2}(a+c) = \frac{a_1d_1}{a_1+d_1} + \frac{b_1c_1}{b_1c_1}, \quad F = \frac{1}{2}(b+d) = \frac{a_1b_1}{a_1+b_1} + \frac{c_1d_1}{c_1+d_1},$$

тогда

$$\frac{e}{f} = \frac{(a+b)(c+d)}{(b+c)(d+a)}.$$

Так как

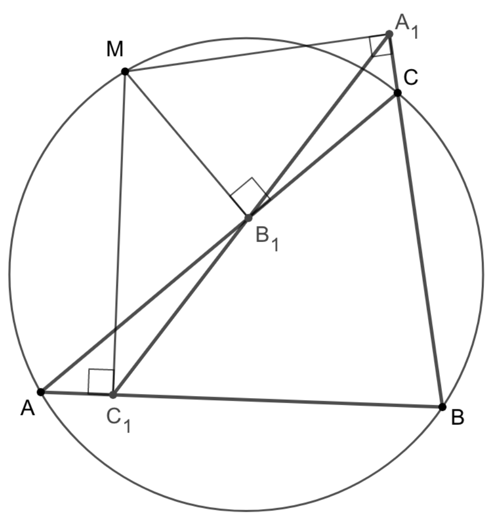
$$\overline{a} = \frac{1}{a}, \quad \overline{b} = \frac{1}{b}, \quad \overline{c} = \frac{1}{c}, \quad \overline{d} = \frac{1}{d}.$$

$$\frac{e}{f} = \frac{\overline{e}}{\overline{f}}.$$

Следовательно, точки O, E, F коллинеарны.

Теорема Симсона

Ортогональные проекции точки, лежащей на описанной около треугольника окружности, на прямые, содержащие его стороны, коллинеарны.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть дана единичная окружность с центром в точке O и треугольник ABC, который вписан в эту окружность. Точки A_1, B_1, C_1 — проекции точки M окружности на прямые BC, AC, AB соответсвенно. Запишем координаты точек:

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(b + c + m - \frac{bc}{m}\right)$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(a + c + m - \frac{ac}{m}\right)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(a + b + m - \frac{ab}{m}\right)$$

Следовательно,

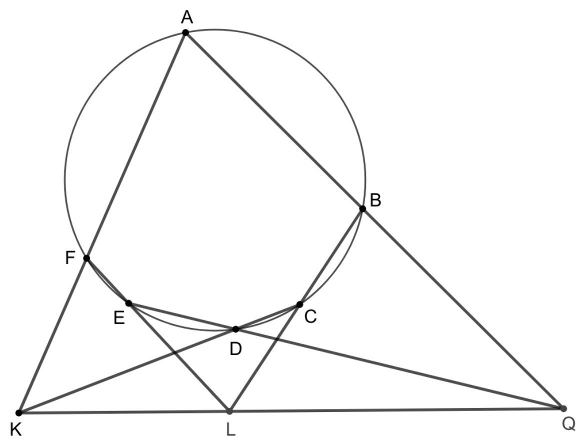
$$\frac{a_1 - c_1}{b_1 - c_1} = \left(c - a + \frac{ab - bc}{m}\right) : \left(c - b + \frac{ab - ac}{m}\right) = \frac{(c-a)(m-b)}{(c-b)(m-a)} = \frac{\overline{a_1} - \overline{c_1}}{\overline{b_1} - \overline{c_1}}.$$

Из этого можно сделать вывод, что точки A_1, B_1, C_1 коллинеарны. Содержащая их прямая является прямой Симсона точки M относительно вписанного треугольника ABC.

Обратное утверждение: *если основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки на прямые, содержащие стороны треугольника, коллинеарны, то эта точка принадлежит окружности, описанной около данного треугольника.*

Теорема Паскаля

Точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны вписанного шестиугольника, лежат на одной прямой.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Пусть $AF \cap DC = K, BC \cap FE = L, AB \cap ED = Q$. Если мы принимаем центр окружности за начало, а её радиус за единицу длины, то можно найти комплексные координаты точек пересечения секущих к данной окружности.

$$\overline{q} = \frac{a + b - (d + e)}{ab - de}$$

$$\overline{l} = \frac{b + c - (e + f)}{bc - ef}$$

$$\overline{k} = \frac{c + d - (f + a)}{cd - fa}$$

Найдём значение разности $\overline{q} - \overline{l}$ и $\overline{l} - \overline{k}$, а затем разделим первое на второе:

$$\overline{q} - \overline{l} = \frac{(b - e)(bc - cd + de - ef + fa - ab)}{(ab - de)(bc - ef)}$$

$$\bar{l}-\bar{k}=\frac{(c-f)(cd-de+ef-fa+ab-bc)}{(bc-ef)(cd-af)}$$

$$\frac{\overline{q}-\bar{l}}{\bar{l}-\bar{k}}=\frac{(b-e)(cd-fa)}{(f-c)(ab-de)}.$$

Так как числа $\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d},\overline{e},\overline{f}$ равны, соответственно, $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c},\frac{1}{d},\frac{1}{e},\frac{1}{f}$, то проверка показывает, что последнее выражение равно своему сопряжённому. Следовательно, точки K,L,Q коллинеарны.

2.8 Примеры решения задач

1. Докажите, что четырэхугольник $ABCD$ является параллелограммом только тогда, когда комплексные координаты a,b,c,d его вершин удовлетворяют равенству $a+c=b+d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $ABCD$ - параллелограмм, следовательно, комплексные координаты середин отрезков BD и AC равны соответственно

$$\frac{1}{2}(b+d),\quad \frac{1}{2}(a+c).$$

В параллелограмме диагонали делятся пополам точкой пересечения, из этого следует, что

$$\frac{1}{2}(b+d)=\frac{1}{2}(a+c)\Leftrightarrow b+d=a+c.$$

2. Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть в треугольнике ABC комплексные координаты вершин равны соответственно a,b,c соответственно. Точка M_1 — середина BC, M_2 — середина AC, M_3 — середина AB. Тогда комплексные координаты точек M_1,M_2,M_3 будут равны соответственно:

$$\frac{1}{2}(b+c),\quad \frac{1}{2}(a+c),\quad \frac{1}{2}(a+b).$$

Сумма квадратов медиан треугольника ABC равна:

$$AM_1^2+BM_2^2+CM_3^2=$$

$$=(a-\frac{1}{2}(b+c))(\overline{a}-\frac{1}{2}(\overline{b}+\overline{c}))+(b-\frac{1}{2}(a+c)(\overline{b}-\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{c}))+(c-\frac{1}{2}(a+b))(\overline{c}-\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b})).$$

Преобразовав полученное выражение, получаем:

$$\frac{3}{4}(2a\overline{a}+2b\overline{b}+2c\overline{c}-a\overline{b}-\overline{a}b-a\overline{c}-\overline{a}c-\overline{b}c-b\overline{c}).$$

Следующий шаг – найти сумму квадратов сторон.

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 =$$

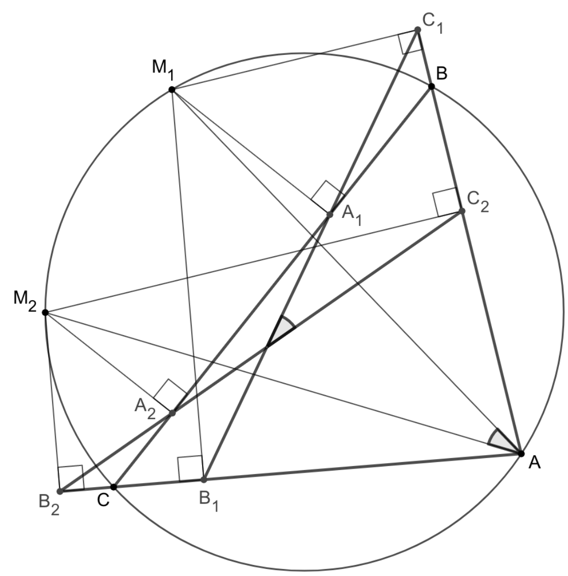
$$= (a-b)(\overline{a}-\overline{b}) + (b+c)(\overline{b}-\overline{c}) + (a-c)(\overline{a}-\overline{c}) =$$

$$= 2a\overline{a} + 2b\overline{b} + 2c\overline{c} - a\overline{b} - \overline{a}b - a\overline{c} - \overline{a}c - \overline{b}c - b\overline{c}.$$

Таким образом,

$$AM_1^2 + BM_2^2 + CM_3^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2).$$

3. Доказать, что угол между прямыми Симсона точек M_1 и M_2 описанной около треугольника ABC окружности относительно этого треугольника равен вписанному углу, опирающемуся на дугу M_1M_2.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть точке M_1 соответствует прямая Симсона, содержащая ортогональные проекции A_1, B_1, C_1 точки M_1 на прямые BC, CA, AB, а точке M_2 — прямая Симсона, проходящие через ортогональные проекции A_2, B_2, C_2 точки M_2 на те же три прямые. При описанной единичной окружности имеем:

$$2b_1 = a + c + m_1 - \frac{ac}{m_1}, \quad 2c_1 = a + b + m_1 - \frac{ab}{m_1},$$

$$2b_2 = a + c + m_2 - \frac{ac}{m_2}, \quad 2c_2 = a + b + m_2 - \frac{ab}{m_2}.$$

Векторами $2\overrightarrow{B_1C_1}$ и $2\overrightarrow{B_2C_2}$ соответствуют комплексные числа $2(c_1-b_1) = (b-c)(1-a\overline{m_1})$ и $2(c_2-b_2) = (b-c)(1-a\overline{m_2})$. Из этого следует, что

$$(\widehat{\overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{B_2C_2}}) = \arg\frac{c_2-b_2}{c_1-b_1} = \arg\frac{1-a\overline{m_2}}{1-a\overline{m_1}} = \arg\frac{m_1(m_2-a)}{m_2(m_2-a)}.$$

С другой стороны,

$$\widehat{\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}} = \arg\frac{m_2-a}{m_1-a}.$$

Вычитая первое равенство из второго, мы получаем:

$$(\widehat{\overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{B_2C_2}}) - (\widehat{\overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{B_2C_2}}) = \arg\frac{m_1}{m_2} =$$

$$(\widehat{\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_1}}) = -(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}}) = -2(\widehat{\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}}).$$

Следовательно, $(\widehat{\overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{B_2C_2}}) = -(\widehat{\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}})$. Ориентированные углы между этими векторами равны по величине, но имеют противоположные знаки.

4.Докажите, что расстояние от основания высоты, проведённой к прямой AB, до середины этой стороны равно радиусу описанной около треугольника окружности, если разность углов A и B треугольника ABC равна $90°$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$A - B = \dfrac{\pi}{2} = \arg\dfrac{(c-a)(c-b)}{(b-a)(a-b)}$. Пусть треугольник вписан в единичную окружность, тогда $ab = -c^2$. H — основание высоты, K — середина AB, тогда $c-h-k$ и $NK^2 = c\overline{c} = 1$.

5. Докажите, что если средние линии четырёхугольника равны, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть комплексные координаты вершин A, B, C, D четырёхугольника $ABCD$ равны a, b, c, d соответственно. Середина AB имеет комплексную координату $\dfrac{a+b}{2}$, середина BC координату $\dfrac{b+c}{2}$, середина CD координату $\dfrac{c+d}{2}$, середина AD координату $\dfrac{a+d}{2}$. Средние линии четырёхугольника равны, значит:

$$\left(\frac{a+b}{2} - \frac{c+d}{2}\right)\left(\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2} - \frac{\overline{c}+\overline{d}}{2}\right) = \left(\frac{b-c}{2} - \frac{a+d}{2}\right)\left(\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2} - \frac{\overline{a}+\overline{d}}{2}\right)$$

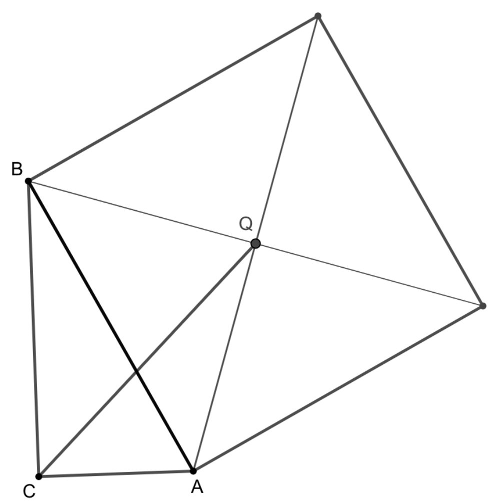
После преобразования выражения получается равенство:

$$((a-c)-(d-b))((\overline{a}-\overline{c})-(\overline{d}-\overline{b})) = ((b-a)-(d-c))((\overline{b}-\overline{a})-(\overline{d}-\overline{c})$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{\overline{a}+\overline{c}}{\overline{b}+\overline{d}}.$$

Из этого следует, что AC и BD перпендикулярны.

6. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB построен квадрат вне треугольника. Найдите расстояние от вершины C прямого угла до центра квадрата Q, если длины катетов BC и AC равны соответственно a и b.



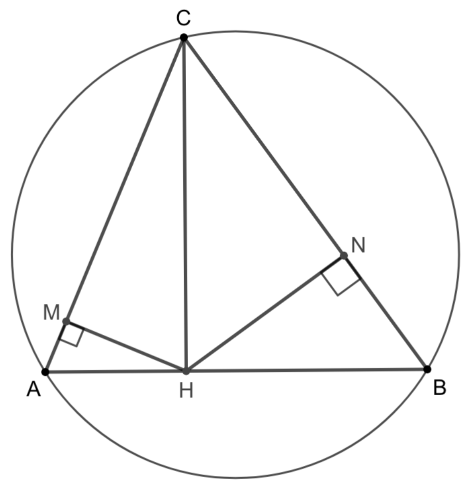
РЕШЕНИЕ

Введём комплексную систему координат, приняв за мнимую ось катет CB, а за действительную — CA. Тогда точки A и B будут иметь комплексные координаты b и ai соответственно, причём $b = \overline{b}, a = \overline{a}$. Если вектор $\overrightarrow{QB}$ повернуть на $90°$ градусов, то он перейдёт в вектор $\overrightarrow{QA}$, следовательно, $(ai-q)i = b-q$, где q – координата точки Q. Выражая q получаем $q = \dfrac{a+b}{1-i}$.

$$CQ^2 = q\overline{q} = \frac{a+b}{1-i} \cdot \frac{a+b}{1+i} = \frac{1}{2}(a+b)^2$$

$$CQ = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

7. Из основания высоты треугольника опущены перпендикуляры на две стороны, не соответствующие этой высоте. Докажите, что расстояние между основаниями этих перпендикуляров не зависит от выбора высоты треугольника.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть вокруг треугольника ABC описана единичная окружность. Если CH — высота треугольника, то $h = \dfrac{1}{2}\Big(a + b + c - \dfrac{ab}{c}\Big)$. Комплексные координаты оснований M и N перпендикуляров, опущенных из точки H на AC и B соответственно, равны

$$m = \frac{(a + c + h - ac\overline{d})}{2}, \quad n = \frac{b + c + h - bc\overline{d}}{2}.$$

Вычитая второе из первого, получаем:

$$m - n = \frac{1}{2}(a - b + c\overline{d}(b - a)) = \frac{1}{2}(a - b)(1 - c\overline{d}) = \frac{(a - b)(a - c)(b - c)}{4ab}.$$

Так как $|a| = |b| = 1$, то $|m - n| = \dfrac{|(a - b)(b - c)(c - a)|}{4}$. Из этого следует, что выражение симметрично относительно a, b, c, то есть расстояние MN не зависит от выбора высоты треугольника.

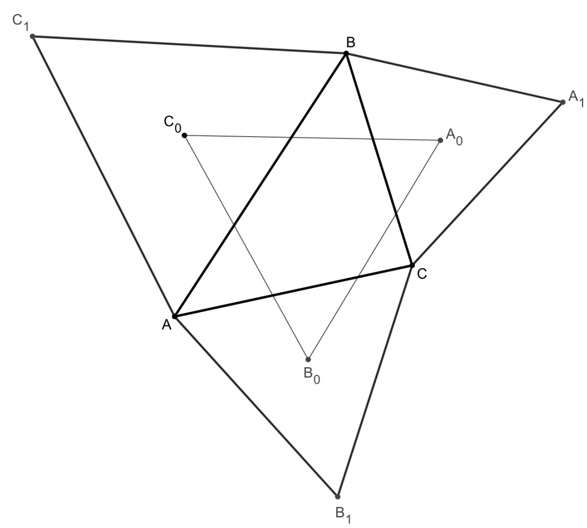
8. Докажите теорему Монжа, которая гласит, что *во вписанном четырёхугольнике прямые, проходящие через середины сторон и диагоналей перпендикулярно противоположным сторонам или, соответственно, другой диагонали, пересекаются в одной точке, называемой точкой Монжа этого четырёхугольника.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Серединные перпендикуляры к сторонам четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в центре описанной окружности, который примем за начальную точку. Для каждой точки $M(z)$ серединного перпендикуляра к AB число

$\dfrac{z-\frac{1}{2}(a+b)}{a-b}$, — чисто мнимое. В частности, при $z=0$ оно равно $-\dfrac{a+b}{2(a-b)}$. Аналогично для всех точек $N(z)$ прямой, проходящей через середину отрезка CD перпендикулярно AB, и только для них, число $\dfrac{z-\frac{1}{2}(c+d)}{a-b}$ будет чисто мнимым. Но для $z=\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$ оно равно $\dfrac{a+b}{2(a-b)}$, а значит, чисто мнимое. Следовательно, точка E с комплексной координатой $\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$ лежит на данной прямой. Поскольку выражение симметрично относительно перестановок букв a, b, c, d, то и остальные пять аналогично постороенных прямых проходят через точку E.

9. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC, AC постороены одинаково ориентированные равносторонние треугольники BA_1C, ABC_1, AB_1C. Докажите, что их центры A_0, B_0, C_0 являются вершинами равностороннего противоположно ориентированного треугольника.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Так как по условию задачи даны правильные треугольники, то

$$a+b_1\varepsilon+c\varepsilon^2=0,\quad b+c\varepsilon+a_1\varepsilon^2=0,\quad c_1+a\varepsilon+b\varepsilon^2=0.$$

Координаты точек A_0, B_0, C_0 соответственно равны:

$$a_0=\frac{1}{3}(b+c+a_1),\quad b_0=\frac{1}{3}(c+a+b_1),\quad c_0=\frac{1}{3}(a+b+c_1).$$

Отсюда следует, что

$$3(c_0+\varepsilon b_0+\varepsilon^2 a_0)=(a+b_1\varepsilon+c\varepsilon^2)+(b+c\varepsilon+a_1\varepsilon^2)+(c_1+a\varepsilon+b\varepsilon^2)=0.$$

То есть треугольник ABC — правильный и той же ориентации, что и данные правильные треугольники, а значит, треугольник A_0, B_0, C_0 имеет противоположную ориентацию.

10. В четырёхугольнике, который не является трапецией, есть прямая, соединяющая середины двух противополоджных сторон, образует равные углы с двумя другими сторонами. Докажите, что последние две стороны равны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть M, N - середины сторон BC и DA положительно ориентированного четырёхугольника $ABCD$, $(\widehat{\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{NM}})$.

$$\arg \frac{b-a}{m-n} = \arg \frac{m-n}{c-d} \Leftrightarrow \arg \frac{(b-a)(c-d)}{(m-n)^2} = 0.$$

Это значит, что число $\dfrac{(b-a)(c-d)}{(m-n)^2}$ является действительным. Но $m = \dfrac{1}{2}(b+c), n = \dfrac{1}{2}(a+d)$, следовательно,

$$\frac{(b-a)(c-d)}{(m-n)^2} = \frac{4(b-a)(c-d)}{((b-a)+(c-d))^2}.$$

Если обозначить $b - a = l, c - d = k$, то предыдущие равенство будет эквивалентно $\dfrac{lk}{(l+k)^2}$ и будет действительным числом. Поэтому $\dfrac{(l+k)^2}{lk} = \dfrac{(\bar{l}+\bar{k})^2}{\overline{lk}}$.

А это равенство эквивалентно следующему:

$$(l\bar{l} - k\bar{k}) = (l\bar{k} - \bar{l}k) = 0.$$

Так как четырёхугольник $ABCD$ не является трапецией, то $l\bar{k} \neq \bar{l}k$, а, значит, $l\bar{l} = k\bar{k} \Leftrightarrow AB = CD$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что если AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC и H — его ортоцентр, то выполняется равенство $AA_1 \cdot AH + BB_1 \cdot BH = AB^2$.

2. В равнобедренном треугольнике найдите величину угла между боковыми сторонами, если медианы, проведенные к боковым сторонам, перпендикулярны.

3. Докажите, что ортоцентр треугольника служит центром вписанной окружности для треугольника, вершинами которого являются основания высот данного треугольника.

4. Углы треугольника ABC связаны соотношением $\tan A \cdot \tan B = 2$. Докажите, что ортоцентр треугольника делит пополам высоту, опущенную на сторону AB.

5. Из некоторой точки на стороны треугольника опущены перпендикуляры, через основания которых проведена окружность. Докажите, что перпендикуляры к сторонам треугольника во вторых точках пересечения сторон с этой окружностью так же пересекаются в одной точке.

6. Прямые, проведённые через вершины треугольника ABC параллельно противоположным сторонам, пересекают описанную окружность соответственно в точкахA_1, B_1, C_1. Докажите, что прямые A_1B и AB_1, B_1C и BC_1, C_1A и CA_1 пересекаются в точках, лежащих на прямой Эйлера треугольника.

7. Докажите, что если в плоскости параллелограмма $ABCD$ существует такая точка N, что $NA^2 + NC^2 = NB^2 + ND^2$, то $ABCD$ — прямоугольник.

8. Точки A и B симметричны относительно центра окружности. Докажите, что для любой точки M этой окружности значение суммы $MA^2 + MB^2$ — величина постоянная.

9. Докажите, что для выпуклого четырёхугольника выполняется равенство $AC^2BD^2 = AB^2CD^2 + BC^2AD^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cos(\widehat{A} + \widehat{C})$.

10. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали пересекаются в точке O, что угол AOB равен $60°$.Докажите, что середины отрезков OA, OD, BC являются вершинами правильного треугольника.

11. На сторонах AB и CD произвольного выпуклого четырёхугольника $ABCD$ построены одинаково ориентированные квадраты $ABMN$ и $CDKL$. Докажите, что середины диагоналей четырёхугольников $ABCD$ и $MNKL$ являются вершинами квадрата.

12. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основаниями AB и углом при вершине C, равным $180°$, выбраны точки D и E так, что $\widehat{DAB} = \widehat{ABE} = 10°, \widehat{EAB} = 20°, \widehat{DBA} = 30°$. Докажите, что $\widehat{DCB} = 10°, \widehat{ECA} = 20°$.

13. В правильном треугольнике ABC на прямой BC отмечена точка D, а на прямой AB — точка E так, что $AE = BD, (\widehat{\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AE}}) = 60°$. Докажите, что $EC = ED$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

ГЛАВА 1

1.2 а)$10+3i$ б) 12 в)$-1-6i$ г)$1-2i$ д)$-15-2i$ е) 24 ж) $8+4i$ з) $-2,2+1,6i$ и) $0,5+0,5i$ к) $-i$ л)$1-i$

1.3

1. а) $x=1\pm 4i$ б) $-3\pm 3i$ 2. а) $-1-i$ б) $i-1$ 3. а)$\pm(4+i)$ б)$\pm\frac{7-i}{\sqrt{2}}$ в) $\pm\frac{9+i}{\sqrt{2}}$

1.4

1. а)$\sqrt{761}$ б)$\sqrt{2}$ в)10 г)$\sqrt{2}$ 2. а)$z_1=i, z_2=3$ б)$z_1=2-i, z_2=2+3i$ 3. а)$\frac{17+7i}{13}$ б)$\frac{-55+37i}{13}$ в)$\frac{1-15i}{4}$

1.5

а) $8(\cos\pi+i\sin\pi)$ б)невозможно в) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$ г) $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$ д) $\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})$ е) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ ж) $\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})$

1.6

1. $z=10(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$ 2. $z=\frac{2}{3}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ 3. а)$-2; 1\pm i\sqrt{3}$ б) $\pm(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}), \pm(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{3}{2})$ в) $\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}, -\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}, -\cos\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}, -\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}$ 4. $1, \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.7

1. а)-1 б)$\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ в)$2\sqrt{3}-2i$ г)-1 2. а)$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ б)$2e^{\frac{2\pi}{3}i}$ в)$e^{-\frac{5\pi}{4}i}$ 3. а)$2e^{\frac{3\pi}{4}i}$ б)$\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}$ 4. а)$0,5e^{\frac{3\pi}{4}i}$ б)$\sqrt{3}e^{\frac{7\pi}{6}i}$

ГЛАВА 2

1. Так как векторы $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AH}$ сонаправлены, то $AA_1\cdot AH=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AH}$.

2. $\arccos\frac{4}{5}$

3. Если A_1, B_1, C_1 - основания высот и H - точка их пересечения, то необходимо доказать, что точка пересечения высот треугольника есть точка пересечения биссектрис.

4. $3bc+3ca+ab+c^2=0, -\frac{bc}{c}=3a+3b+c$

5. Пусть единичная окружность пересекает прямые AB, BC, CA в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2. Точки A_1, B_1, C_1 служат проекцией точки P на эти прямые. $a_2-a_1+m-a_1a_2\overline{m}=0, b_2-b_1+m-b_1b_2\overline{m}=0, c_2-c_1+m-c_1c_2\overline{m}=0$.

6. Пусть треугольник вписан в единичную окружность, тогда $a_1=\frac{bc}{a}, b_1=\frac{ca}{b}, c_1=\frac{ab}{c}$. Для точки $d=\frac{a+b+c}{1+a\overline{b}+\overline{a}b}$

7. Точка O - точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, начальная точка. Точка N имеет комплексную координату z, $c=-a, d=-b$. Докажите, что $a\overline{a}=b\overline{b}$.

8.Примем за начальную точку центр окружности, $b=-a$ в силу симметрии. $MA^2+MB^2=(m-a)(\overline{m}-\overline{a})+(m-b)(\overline{m}-\overline{b})$

9. Примите вершину A за начальную точку, а координаты точек B, C, D за b, c, d соответственно. $\widehat{A}=\arg d-\arg b=\arg\frac{d}{b}, \widehat{C}=\arg(b-c)-\arg(d-c)=\arg\frac{b-c}{d-c}$

10. Пусть O - начальная точка, тогда $b=\alpha a, c=\lambda a, d=\lambda c=\alpha\lambda a$, где $\alpha=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ и $\lambda=\overline{\lambda}$

11. $m=b+(b-a)i, n=a+(b-a)i, l=c+(d-c)i, k=d+(d-c)i$

12. Пусть треугольник вписан в единичную окружность, тогда $a = 1, b = \alpha^8, c = \alpha^{13}, \alpha = \cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}$

13. $b = 0, c = 1, a = \alpha = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}, d = \overline{d}, e - a = \alpha d.$

Список литературы

[1] Я. П. Понарин. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. — М.: Издательство московского центра непрерывного математического образования, 2014.

[2] И. М. Яглом. Комплексные числа. — М.: Физматгиз, 1963.

[3] Ю. А. Глазков, И. К. Варшавский, М. Я. Гаиашвили. Комплексные числа. — М.: Экзамен, 2012.

[4] Л. И. Лазарева. Алгебраические преобразования, комплексные числа. — Т.: Учебное пособие для абитуриентов, 2004.

[5] А. Г. Мордкович, Л. О. Денищева, Л. И. Звавич, Т. А. Корешкова, Т. Н. Мишустина, А. Р. Рязановский, П. В. Семенов. Алгебра и начала математического анализа 10 кл. задачник. — М.: Мнемозина, 2009.

[6] А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. Алгебра и начала математического анализа 10 кл. учебник. — М.: Мнемозина, 2009.

[7] Н. Я. Виленкин, Р. С. Гутер и др. Алгебра: Учебное пособие для 9—10 кл. средних школ с математической специализацией. — М.: Просвещениеа, 1968.