Многоборье-2014

Регата

Младшая лига

Первый тур

1. Даны 4 натуральных числа. В каждой тройке их сумма делится на среднее из них по величине. Докажите, что среди чисел есть равные.

(А. Шаповалов)

2. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Точка L лежит на продолжении стороны AB за вершину A. Проведенная из L касательная к окружности пересекает сторону AC в точке K. Найдите $\angle KOL$, если $\angle BAC = 50°$.

(перелицовка задачи Соросовской олимпиады 1995)

3. За круглым столом сидели несколько лжецов и рыцарей. Первый сказал: «Не считая меня, здесь лжецов на одного больше, чем рыцарей.». Второй сказал: «Не считая меня, здесь лжецов на два больше, чем рыцарей.», и так далее вплоть до последнего. Сколько человек могло сидеть за столом?

(А. Шаповалов)

Второй тур

4. Числа a, b, c различны, а прямые $y = a^2x + bc$, $y = b^2x + ac$ и $y = c^2x + ab$ проходят через одну точку. Докажите, что $a + b + c = 0$.

(А. Шаповалов)

5. Из точки A_0 под углом в $7°$ проведены черный и красный лучи, после чего построена ломаная $A_0A_1 \ldots A_{20}$ (возможно, самопересекающаяся, но все вершины различны), у которой все звенья имеют длину 1, все четные вершины лежат на черном луче, а нечетные — на красном. Вершина с каким номером наиболее удалена от вершины A_0?

(старый конкурс Кенгуру)

6. 5 аборигенов хотят переправиться в двухместной лодке через реку Лимпопо. Изначально каждый о ком-нибудь из остальных слышал слух, что тот — вирусоноситель лихорадки Эболы, и о каждом кто-то из остальных такое слышал. С тем, о ком он такое слышал, абориген вместе в лодку не сядет. На берегах аборигены не разговаривают, зато в лодке обмениваются всеми известными им слухами. Может ли случиться, что все они таки смогут переправиться?

(А. Шаповалов)

Третий тур

7. На столе стоит 17 стаканов компота, наполненных в разной степени. Общий объем сухофруктов составляет 10% от всего компота. Петя и Вася выбирают и выпивают стаканы по очереди (начинает Петя), пока не выпьют всё. Докажите, что Петя всегда может добиться, чтобы в выпитом им компоте доля сухофруктов отличалась от 10% не больше, чем доля сухофруктов у Васи.

(А. Шаповалов)

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и C параллельны и пересекают диагональ BD в двух различных точках P и Q, при этом $BP = DQ$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

(А. Шаповалов)

9. Несколько ладей побили все белые клетки шахматной доски 40×40. Какое наибольшее число черных клеток могли остаться не побитыми? (Ладья бьет клетку, на которой стоит.)

(А. Шаповалов)

Четвертый тур

10. На доске написано 100 различных целых чисел. Каждое число Вася возвел то ли в квадрат, то ли в куб и записал получившиеся 100 чисел на второй доске. Затем Вася возвел то ли в квадрат, то ли в куб каждое из чисел на второй доске (каждый раз выбирая степень наугад) и записывал результаты на третьей доске. Какое наименьшее количество различных чисел могло быть записано на третьей доске?

(А. Шаповалов по мотивам дополнительной задачи Кенгуру 2014)

11. Бумажный прямоугольник $ABCD$ ($AB = 3$, $BC = 9$) перегнули так, что вершины A и C совпали. Какова площадь получившегося пятиугольника?

(дополнительные задачи Кенгуру 2014)

12. Назовем девятизначное число *хорошим*, если в нем можно переставить одну цифру на *другое* место и получить девятизначное число, в котором цифры идут строго по возрастанию. Сколько всего хороших чисел?

(А. Шаповалов)

Старшая лига

Первый тур

13. Числа a и b таковы, что графики $y = ax - b$ и $y = x^2 + ax + b$ ограничивают конечную фигуру ненулевой площади. Докажите, что внутри этой фигуры лежит начало координат.

(А. Шаповалов)

14. Все вершины правильного многоугольника лежат на поверхности куба, но его плоскость не совпадает ни с одной из плоскостей граней. Какое наибольшее количество вершин может быть у этого многоугольника?

(А. Шаповалов)

15. Можно ли клетчатый прямоугольник 12345×6789 разбить по границам клеток на 7890 прямоугольников с одинаковыми диагоналями?

(А. Шаповалов)

Второй тур

16. Произведение всех натуральных делителей натурального числа n (включая n) оканчивается на 120 нулей. На сколько нулей может оканчиваться число n? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)

(по мотивам Кенгуру 2013)

17. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D. Оказалось, что $\angle BDC$ равен $60°$. Докажите, что вписанные окружности треугольников ABD и CBD касаются стороны BD в одной точке и найдите отношение радиусов этих окружностей.

(М. Волчкевич)

18. 100 аборигенов смогли переправиться в двухместной лодке с левого берега Лимпопо на правый. Изначально каждый об одном или нескольких из остальных слышал слух, что они — вирусоносители лихорадки Эболы. С тем, о ком он такое слышал, абориген вместе в лодку не садился. На левом берегу распространение слухов запрещено, зато достигнув правого берега, аборигены высаживаются, все обмениваются всеми слухами, и только потом лодка возвращается. О каком наименьшем числе аборигенов могло совсем не быть слухов, что они — вирусоносители?

(А. Шаповалов)

Третий тур

19. Барон Мюнхгаузен выписал на доску 10 действительных слагаемых, а их сумму записал на листок. За одну операцию он заменял одно или несколько слагаемых на доске на обратные величины, и снова выписывал сумму на листок. Мог ли он в результате 500 таких операций выписать на листок числа $1, 2, \ldots, 500$?

(А. Шаповалов)

20. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) выбрали такую точку N, что $2\angle ANB = 180^\circ + \angle ACB$. Прямая, проходящая через точку C и параллельная AN, пересекает прямую BN в точке D. Биссектрисы углов CAN и ABN пересекаются в точке P. Докажите, что прямые DP и AN перпендикулярны.

(Middle European 2013)

21. При любой раскраске клеток клетчатой доски в черный и белый цвета доска делится на одноцветные области (при шахматной раскраске все области — одноклеточные). Каждым ходом Петя выбирает одну область и перекрашивает её в противоположный цвет. Перекрашенная область склеивается в одну с соседними областями того же цвета, и число областей уменьшается. За какое наименьшее число ходов Петя сможет из шахматно раскрашенной доски 13×13 сделать одноцветную доску?

(А. Шаповалов)

Четвертый тур

22. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые для всех действительных x удовлетворяют соотношениям

$$\underbrace{f(f(f \ldots f}_{13}(x) \ldots)) = -x, \qquad \underbrace{f(f(f \ldots f}_{8}(x) \ldots)) = x\,.$$

(А. Устинов)

23. На сторонах BC, CA и AB остроугольного треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Описанные окружности треугольников AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 пересекаются в точке P внутри треугольника ABC. Точки O_1, O_2 и O_3 — центры этих окружностей. Докажите, что $4S(O_1O_2O_3) \geqslant S(ABC)$.

(А. Смирнов по мотивам Macedonia 2014)

24. Докажите, что число способов раскрасить ребра n-угольной призмы в 4 данных цвета так, чтобы на ребрах каждой грани встречались все цвета, не превосходит $8 \cdot 6^{n-1} - 12 \cdot 2^{n-1}$.

(А. Шаповалов)

Алгебра и теория чисел

Младшая лига

25. Электричка Москва–Петушки проходит начальный путь — от Курского вокзала до Дрезны — втрое дольше, чем от Леоново до Петушков. При этом от Дрезны до Петушков она идёт вдвое быстрее, чем от Курского вокзала до Леоново. Во сколько раз время пути от Курского вокзала до Петушков больше, чем от Дрезны до Леоново?

(South Africa 2014)

26. Для каких натуральных n найдутся целые x, y, z такие, что

$$x + y + z = 0, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}\ ?$$

(Iberoamerican 2011)

27. Найдите все совершенные числа, в разложение которых на простые множители каждое простое входит в нечетной степени. (Напомним, что натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих натуральных делителей, меньших самого числа — например, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.)

(IMC 2014)

28. Для натуральных чисел n, k докажите неравенство

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{nk} < \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2}\,.$$

(олимпиада матмеха СПбГУ 2014)

Старшая лига

29. Решите неравенство

$$20 - 14(20 - 14(20 - \ldots - 14(20 - 14x)\ldots)) > x.$$

Здесь 2014 пар скобок.

(Соросовская олимпиада 1995)

30. Пусть $R(n)$ — количество представлений натурального числа n в виде суммы $n = a + b$ двух простых чисел (например, $R(3) = 0$, $R(4) = 1$, $R(10) = 3$, поскольку $10 = 3 + 7 = 5 + 5 = 7 + 3$). Докажите, что если $p < q$ — два последовательных простых числа, то сумма

$$2R(q-2) + 3R(q-3) + 5R(q-5) + \ldots + p \cdot R(q-p)$$

кратна q.

(В. Быковский)

31. Найдите все функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что $f(n+1) > \frac{f(n)+f(f(n))}{2}$ при всех натуральных n.

(Iran 2014)

32. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — состоящая из натуральных чисел арифметическая прогрессия, причем x_1 и x_2 взаимно просты. Предположим, что произведение членов этой прогрессии имеет $m < n$ простых делителей. Докажите, что $x_1^{n-m} \leqslant (n-1)!$.

(Paul Erdős)

Комбинаторика и логика

Младшая лига

33. Черный снаружи куб $4 \times 4 \times 4$ распилили на 64 единичных кубика. Грани кубиков, примыкающие к распилам — белые. Можно ли сложить из них параллелепипед $1 \times 8 \times 8$, у которого обе грани 8×8 раскрашены в шахматном порядке?

(Högstadiets Matematiktävling 2002)

34. Есть фонарик, в который помещается 2 батарейки, и есть 10 батареек, из которых 5 хороших и 5 плохих. За одну попытку можно вставить в фонарик 2 батарейки. Он будет светить только когда обе батарейки — хорошие. Как не позднее чем на 8-й попытке наверняка добиться, чтобы фонарик светил?

(А. Устинов)

35. Дан правильный 777-угольник. Петя и Вася по очереди проводят его диагонали, начинает Петя. Диагонали не должны пересекаться внутри многоугольника. Проигрывает тот, после чьего хода диагонали разобьют 777-угольник на части, среди которых есть четырехугольная. Кто из игроков выигрывает, как бы ни играл соперник?

(Rioplatense Olympiad 2013, Level 3)

36. В компании из n человек нет тех, которые были бы не знакомы ни с кем, и тех, которые были бы знакомы со всеми остальными. Докажите, что каких-то четверых из них можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый был знаком ровно с одним своим соседом.

(Kürschák 2014)

37. Фокусник и ассистент хотят показать следующий фокус. В отсутствие фокусника зрители пишут в секторах круглого барабана n чисел, каждое из которых 0 или 1. Затем ассистент закрывает одно из чисел черной карточкой и зрители вращают барабан. Зашедший после этого фокусник должен угадать число под карточкой. При каких n фокусник и ассистент могут договориться, чтобы этот фокус гарантированно получался?

(А. Устинов)

Старшая лига

38. Муха ползает по ребрам октаэдра, причем, выползая из одной вершины по некоторому ребру, она доползает до другой (а не возвращается обратно с полпути). Может ли однажды оказаться, что она в одной из вершин побывала 2014 раз, а в каждой из остальных — 650 раз?

(Math League Tournaments)

39. Фокусник и ассистент хотят показать следующий фокус. В отсутствие фокусника зрители пишут в секторах круглого барабана девять чисел, каждое из которых 0 или 1. Затем ассистент закрывает одно из чисел черной карточкой и зрители вращают барабан. Зашедший после этого фокусник должен угадать число под карточкой. Могут ли фокусник и ассистент договориться, чтобы этот фокус гарантированно получался?

(А. Устинов)

40. В школе учатся 400 человек, из них 200 двоечников и 200 отличников. На Новый Год Дед Мороз привез мешок, в котором есть 800 конфет «Миндаль Иванович». Он хочет раздать их все детям, причем каждый двоечник должен получить не больше одной конфеты, а каждый отличник — хотя бы 2 конфеты, причем четное количество. Директор школы решил, кроме того, поощрить отличников, приготовив 600 мандаринов, которые хочет раздать так, чтобы каждому отличнику досталось не менее одного. У кого больше способов раздать свои подарки и во сколько раз?

(фольклор)

41. Класс выиграл приз в виде мешка с 2014 монетами, который в начале находится у старосты (а у других детей в классе денег нет). При встрече два одноклассника делят деньги поровну между собой, если у них четное количество монет в сумме. А если в сумме количество нечетное, то одну монету они отдают классному руководителю, а остальные делят поровну между собой. Через некоторое время все монеты оказались у классного руководителя. Какое наименьшее количество детей могло быть в классе?

(Skolornas Matematiktävling 2014)

42. На клетках шахматной доски лежит по алмазу так, что в каждой паре соседних (по стороне) клеток веса алмазов отличаются меньше, чем на 1 карат. Докажите, что эти алмазы можно разложить по одному в клетки прямоугольника 2×32 так, чтобы по-прежнему в каждой паре соседних клеток веса алмазов отличались меньше, чем на 1 карат.

(А. Шаповалов)

Геометрия

Младшая лига

43. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса CL. Известно, что точка L равноудалена от вершины прямого угла B и середины гипотенузы AC. Найдите угол BAC.

(Ф. Нилов)

44. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено $\angle BCA + \angle CAD = 180^\circ$. Докажите, что $AB + CD \geqslant AD + BC$.

(А. Смирнов по мотивам сербской окружной олимпиады 2014)

45. В трапеции $ABCD$ сторона AB параллельна CD, $AB > CD$, а прямая BD делит угол $\angle ADC$ пополам. Прямая, проходящая через C параллельно AD, пересекает отрезки BD и AB в точках E и F соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника BEF. Предположим, что $\angle ACO = 60^\circ$. Докажите, что $CF = AF + FO$.

(Middle European 2012)

46. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбраны такие точки M и N, что $AM < AN$. Прямая, проходящая через M и перпендикулярная CN, пересекает прямую AC в точке P. Прямая, проходящая через N и перпендикулярная CM, пересекает прямую BC в точке Q. Докажите, что описанные окружности треугольников APM и BNQ и прямая PQ имеют общую точку.

(Iran 2014)

Старшая лига

47. Замкнутая шестизвенная ломаная в пространстве такова, что каждое её ребро параллельно одной из координатных осей прямоугольной системы координат. Докажите, что её вершины лежат на одной сфере или в одной плоскости.

(Iran 2014)

48. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы $\angle B$ и $\angle D$ равны. Оказалось, что точки пересечения биссектрис соседних углов $ABCD$ образуют выпуклый четырехугольник $EFGH$ (E лежит на биссектрисах $\angle A$ и $\angle B$, F — $\angle B$ и $\angle C$, и т. д.). Пусть K — точка пересечения диагоналей $EFGH$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD — в точке Q. Докажите, что P лежит на описанной окружности треугольника BKQ.

(Middle European 2012)

49. Точка D — середина биссектрисы BL треугольника ABC. На отрезках AD, DC выбраны точки E, F соответственно так, что углы $\angle BEC$ и $\angle BFA$ — прямые. Докажите, что точки A, E, F, C лежат на одной окружности.

(Украина 2014, задача 10.8)

50. Множество точек в пространстве назовем интересным, если для любой плоскости вне её находится хотя бы 100 точек этого множества. При каком наименьшем d можно утверждать наверняка, что любое интересное множество точек в пространстве содержит интересное подмножество не более чем с d точками?

(IMC 2014)

Командная олимпиада

Младшая лига

51. (4) В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD описанная окружность треугольника BCD пересекает отрезок AD в точке E (отличной от A и D). Докажите, что описанная окружность треугольника ABE касается прямой BC.

(Baltic Way 2013)

52. (4) Можно ли среди чисел $\frac{1}{100}, \frac{2}{99}, \frac{3}{98}, \ldots, \frac{100}{1}$ выбрать три, произведение которых равно 1?

(Högstadiets Matematiktävling 1997/1998)

53. (6) В строке в некотором порядке записаны числа $1, 2, \ldots, n$. Пару чисел назовем *лункой*, если эти числа стоят рядом, либо между ними есть только числа, меньшие каждого из них. Каково наибольшее количество лунок? (Одно число может входить в несколько лунок.)

(А. Лебедев, А. Шаповалов)

54. (7) В круге проведены несколько хорд так, что любые две из них пересекаются внутри круга. Докажите, что можно пересечь все хорды одним диаметром.

(А. Шаповалов)

55. (7) Натуральные числа a и b удовлетворяют соотношению $2a^2 + a = 3b^2 - b$. Докажите, что $a + b$ — точный квадрат.

(по мотивам Skolornas Matematiktävling 2014 Qualification Round)

56. (7) Точка I_b — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC. Другая вневписанная окружность касается стороны AB в точке C_1. Докажите, что точки B, C, C_1 и середина отрезка BI_b лежат на одной окружности.

(по мотивам олимпиады матмеха СПбГУ 2014)

57. (8) На доске написан многочлен $x^2 + x + 2014$. Саша и Федя ходят по очереди, начинает Федя. Федя каждым ходом должен увеличить или уменьшить коэффициент при x на 1, а Саша каждым ходом должен увеличить или уменьшить свободный член на 1. Федя выиграет, если в какой-то момент у многочлена будет целый корень. Докажите, что Саша не сможет помешать ему выиграть.

(India 2014)

58. (8) По кругу стоят 35 чисел. Любые два соседних отличаются не менее чем на 1. Докажите, что сумма квадратов всех чисел не меньше 10.

(Mathlinks)

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=612590

59. (9) Для каких n выпуклый n-угольник можно разрезать на выпуклые шестиугольники?

(В. Быковский, А. Устинов)

Старшая лига

60. (3) Можно ли среди чисел $\frac{1}{100}, \frac{2}{99}, \frac{3}{98}, \ldots, \frac{100}{1}$ выбрать пять, произведение которых равно 1?

(Högstadiets Matematiktävling 1997/1998)

61. (5) В строке в некотором порядке записаны числа $1, 2, \ldots, n$. Пару чисел назовем *лункой*, если эти числа стоят рядом, либо между ними есть только числа, меньшие каждого из них. Каково наибольшее количество лунок? (Одно число может входить в несколько лунок.)

(А. Лебедев, А. Шаповалов)

62. (6) Точка I_b — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC. Другая вневписанная окружность касается стороны AB в точке C_1. Докажите, что точки B, C, C_1 и середина отрезка BI_b лежат на одной окружности.

(по мотивам олимпиады матмеха СПбГУ 2014)

63. (6) Докажите, что для любой последовательности $a_1, a_2, \ldots$ положительных чисел найдется такой номер n, что $\frac{1+a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 + \frac{1}{n}$.

(фольклор)

64. (7) Сферы S_1, S_2 и S_3 касаются друг друга внешним образом и касаются некоторой плоскости в точках A, B и C. Сфера S касается сфер S_1, S_2 и S_3 внешним образом и касается данной плоскости в точке D. Докажите, что проекции точки D на стороны треугольника ABC являются вершинами правильного треугольника.

(фольклор)

65. (7) Через центр правильного треугольника ABC провели произвольную прямую l, пересекающую стороны AB и BC в точках D и E. Построили точку F такую, что $AE = FE$ и $CD = FD$. Докажите, что расстояние от точки F до прямой l не зависит от выбора этой прямой.

(М. Волчкевич)

66. (8) Для каких n выпуклый n-угольник можно разрезать на выпуклые шестиугольники?

(В. Быковский, А. Устинов)

67. (8) Многочлен $f(x)$ степени $2n-1$ с вещественными коэффициентами таков, что многочлен $(f(x))^2 - f(x)$ делится на многочлен $(x^2-x)^n$. Чему может равняться старший коэффициент многочлена $f(x)$?

(North Countries Universities Mathematical Competition 2014)

68. (10) В куче лежит $n > 1$ камней. Двое по очереди берут из кучи камни. Первым ходом можно взять любое количество камней от 1 до $n-1$. Каждым следующим ходом можно брать любое количество камней от 1 до $2k$, где k — количество камней, взятых на предыдущем ходу противником. Выигрывает взявший последний камень. Определите, при каких n второй игрок имеет выигрышную стратегию.

(Brazil 2014)