

Элементарные функции. Параметры

Нечто трансцендентное

1. Решите уравнение $4^x - 2a(a+1)2^{x-1} + a^3 = 0$.

2. Решите уравнение
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 2a^2 \\ \sin x \cos y = a^2(a^2 - 4) \end{cases}.$$

3. Решите уравнение $x(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} = a$.

4. При каких значениях a функция

$$f(x) = (a - x)5^{x+7+4a} - (a + x)5^{a^2-x-5}$$

является нечетной?

5. Значение a подобрано так, что число корней первого из уравнений

$$4^x - 4^{-x} = 2 \cos ax, \quad 4^x + 4^{-x} = 2 \cos ax + 4$$

равно 2007. Сколько корней при том же a имеет второе уравнение?

6. Решите неравенство $\log_{3ax}(4a^2 - x^2) < 1$.

7. Числа a и b таковы, что первое уравнение системы

$$\text{а) } \begin{cases} \cos x = ax + b, \\ \sin x + a = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sin x + a = bx, \\ \cos x = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение.

8. Найдите положительное a , при котором уравнение $a^x = \log_a x$ имеет единственное решение.

9. Найдите все такие a и b , что $|a| + |b| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ и при всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $|a \sin(x) + b \sin(2x)| \leq 1$.

10. Для заданных натуральных чисел $k_0 < k_1 < k_2$ выясните, какое наименьшее число корней на промежутке $[0; 2\pi)$ может иметь уравнение вида

$$\sin k_0 x + A_1 \sin k_1 x + A_2 \sin k_2 x = 0,$$

где $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$?

Элементарные функции. Параметры

Нечто трансцендентное

1. Решите уравнение $4^x - 2a(a+1)2^{x-1} + a^3 = 0$.

2. Решите уравнение
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 2a^2 \\ \sin x \cos y = a^2(a^2 - 4) \end{cases}.$$

3. Решите уравнение $x(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} = a$.

4. При каких значениях a функция

$$f(x) = (a - x)5^{x+7+4a} - (a + x)5^{a^2-x-5}$$

является нечетной?

5. Значение a подобрано так, что число корней первого из уравнений

$$4^x - 4^{-x} = 2 \cos ax, \quad 4^x + 4^{-x} = 2 \cos ax + 4$$

равно 2007. Сколько корней при том же a имеет второе уравнение?

6. Решите неравенство $\log_{3ax}(4a^2 - x^2) < 1$.

7. Числа a и b таковы, что первое уравнение системы

$$\text{а) } \begin{cases} \cos x = ax + b, \\ \sin x + a = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sin x + a = bx, \\ \cos x = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение.

8. Найдите положительное a , при котором уравнение $a^x = \log_a x$ имеет единственное решение.

9. Найдите все такие a и b , что $|a| + |b| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ и при всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $|a \sin(x) + b \sin(2x)| \leq 1$.

10. Для заданных натуральных чисел $k_0 < k_1 < k_2$ выясните, какое наименьшее число корней на промежутке $[0; 2\pi)$ может иметь уравнение вида

$$\sin k_0 x + A_1 \sin k_1 x + A_2 \sin k_2 x = 0,$$

где $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$?