Летняя школа МФТИ – 2014.
Лекции по математике.
Курс Николаева Ю.П.

1. Гиперболический логарифм.

Умножение чисел существенно более трудоемкая операция, чем сложение. Логарифмы позволяют свести умножение к сложению. Изобретение логарифмов является одним из самых замечательных достижений человечества. Это изобретение облегчило труд и существенно увеличило производительность труда сотням тысяч ученых и инженеров. В античные времена, когда логарифмы были неизвестны, вместо них использовались косинусы. Следующее тождество

$$2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y).$$

может быть применено для вычисления произведений с помощью таблиц косинусов. Чтобы перемножить числа x и y, их представляют косинусами $x=\cos a$, $y=\cos b$ с помощью таблиц косинусов. Потом вычисляют $(a+b)$ и $(a-b)$, и находят их косинусы по таблицам. Наконец результаты складываются и делятся пополам. Итак, одно умножение требует 4 поисков по таблицам косинусов, двух сложений, одного вычитания и деления пополам.

Идея логарифмов впервые появилась в 1544 году, когда M. Stiefel сравнил геометрическую и арифметическую прогрессии. Сложение показателей соответствует умножению степеней. Рассмотрим число q, близкое к единице, например $q=1{,}000001$. Вычислим последовательность степеней этого числа и поместим их в левую колонку. Поместим в правую колонку соответствующие величины показателей и логарифмическая таблица готова. Теперь для того, чтобы перемножить два числа x и y, их (или их приближения) находят в левой колонке логарифмической таблицы, то есть представляют в виде степеней q, далее берут из правой колонки значения их логарифмов, то есть показателей степеней. Далее сумму логарифмов находят в правой колонке, и напротив этой суммы находится произведение xy. То есть одно умножение с помощью таблицы логарифмов требует трех поисков в таблице логарифмов и одного сложения, что существенно легче, чем требовалось при умножении с помощью таблиц косинусов.

Гиперболический логарифм.

Фигуру, ограниченную сверху графиком гиперболы $y=\dfrac{1}{x}$, снизу – отрезком $[a,b]$ оси абсцисс $(0<a<b)$, а с боков вертикальными прямыми, проходящими через концы этого отрезка мы будем называть *гиперболической трапецией с основанием* $[a,b]$.

Геометрическая прогрессия точек деления дает арифметическую прогрессию площадей гиперболических трапеций. Это значит, что площадь под гиперболой есть логарифм. Это открытие было сделано английским математиком Грегори в 1647 году.

Для числа $x \geq 1$ его *гипер-болическим логарифмом* называется площадь гиперболической трапеции с основанием $[1, x]$ и обозначается $\ln x$.

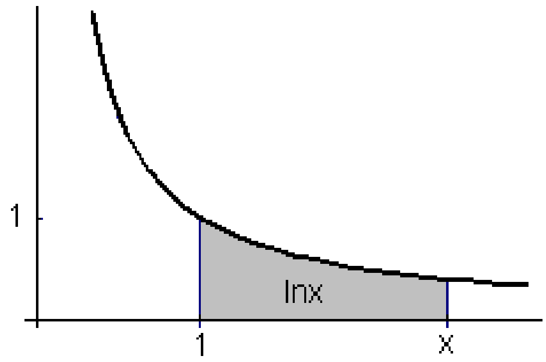


Рис.1

Гиперболический поворот.

Доказательства основных свойств гиперболического логарифма основаны на использовании гиперболического поворота. А именно, *гиперболическим поворотом* с коэффициентом k называется преобразование плоскости, задаваемое в декартовых координатах формулой

$$(x, y) \to \left(kx, \frac{y}{k}\right).$$

Гиперболический поворот не меняет площади никакого прямоугольника со сторонами параллельными осям координат. Вообще, гиперболический поворот не меняет площади никакой фигуры, поскольку ее можно аппроксимировать фигурами, составленными из прямоугольников, параллельных осям координат. Более подробно это свойство гиперболического поворота будет обосновано ниже.

Теорема 1.1. (О гиперболических логарифмах.) *Гиперболический логарифм является монотонно возрастающей функцией, определенной для всех $x > 1$ и при любых x и y удовлетворяет соотношению*

$$\ln xy = \ln x + \ln y.$$

Доказательство. Пусть $x, y > 1$. Так как гиперболический поворот с коэффициентом y переводит гиперболическую трапецию над $[1, x]$ в гиперболическую трапецию над $[y, xy]$. Поскольку площадь первой равна $\ln x$, а второй – $(\ln xy - \ln x)$, постольку получаем $\ln xy = \ln x + \ln y$.

Логарифмы чисел меньших единицы.

Теперь мы определим логарифмы чисел меньших единицы таким образом, чтобы основное свойство логарифмов $\ln xy = \ln x + \ln y$ выполнялось для всех положительных чисел.

Во-первых, заметим,

Теорема 1.2. Существует единственная функция, определенная на множестве положительных чисел, совпадающая с логарифмом для чисел больших единицы и переводящая произведение в сумму.

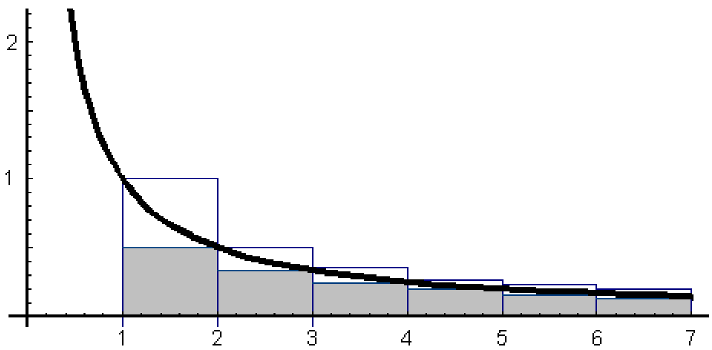
Площадь криволинейной трапеции.

Сейчас мы более подробно проанализируем понятие площади гиперболической и более общей криволинейной трапеции так, чтобы строго доказать использованное выше утверждение о том, что гиперболический поворот сохраняет площади гиперболических трапеций.

Пусть $f(x)$ неотрицательная монотонно убывающая функция, определенная на отрезке $[a,b]$. *Криволинейной трапецией* называется фигура

$$T_f^{[a,b]} = \{(x,y) | a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}.$$

Строго возрастающая последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ точек отрезка $[a,b]$ начинающаяся с $x_0 = a$ и кончающаяся $x_n = b$ называется *разбиением* отрезка $[a,b]$.



Поскольку наша функция является строго монотонно убывающей для любого отрезка $[x,y]$ лежащего в $[a,b]$, прямоугольник высоты $f(x)$ с основанием $[x,y]$ содержит трапецию $T_f^{[x,y]}$, а прямоугольник высоты $f(y)$ содержится в ней (см. рисунок). Первый прямоугольник называется *описанным*, а второй – *вписанным* в эту трапецию.

Объединение вписанных прямоугольников с основаниями $[x_i, x_{i+1}]$ соответствующими некоторому разбиению отрезка называется *вписанным мультипрямоугольником* соответствующего разбиения $\{x_i\}_{i=0}^n$. Аналогично определяется *описанный мультипрямоугольник*.

Площади вписанного и описанного мультипрямоугольников выражаются формулами:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i), \ \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}).$$

Лемма 1.1 (Об аппроксимации.) *Площадь криволинейной трапеции исчерпывается площадями вписанных мультипрямоугольников, то есть всякое число меньшее площади криволинейной трапеции мажорируется площадью некоторого вписанного мультипрямоугольника.*

Доказательство. Пусть площадь криволинейной трапеции равна S и дано $\varepsilon > 0$. Докажем, что найдется вписанный мультипрямоугольник площади большей, чем $S-\varepsilon$. Рассмотрим разбиение основания трапеции на N равных частей. Площади описанного и вписанного мультипрямоугольников в этом случае выражаются формулами:

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\frac{b-a}{N},\ \ s_N = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_{i+1})\frac{b-a}{N}.$$

Тогда их разность $S_N - s_N$ выражается формулой

$$S_N - s_N = \sum_{i=0}^{N-1}\big(f(x_i) - f(x_{i+1})\big)\frac{b-a}{N} = \big(f(a) - f(b)\big)\frac{b-a}{N}.$$

Откуда при $N > \dfrac{\big(f(a)-f(b)\big)(b-a)}{\varepsilon}$ получаем, что эта разность меньше ε. Но $S_N > S$, поэтому и $S - s_N < \varepsilon$. Что и требовалось доказать.

Лемма 1.2 (О гиперболическом повороте.) Гиперболический поворот сохраняет площади фигур.

Доказательство. Пусть гиперболическая трапеция площади S перешла в результате применения гиперболического поворота в трапецию площади S'. Предположим $S > S'$. Тогда, в силу леммы 1.1 найдется вписанный в первую трапецию мультипрямоугольник площади s_1 большей, чем S'. Но тогда гиперболический поворот переведет его в мультипрямоугольник той же площади вписанный во вторую трапецию. Получаем, что вписанный мультипрямоугольник имеет площадь большую, чем содержащая его трапеция. Полученное противоречие завершает доказательство.

О касательных к гиперболе

Лемма 1.3 Прямая $x + y = c$ пересекает положительную ветвь гиперболы $xy = 1$ в двух точках, если $c > 2$, в одной точке, если $c = 2$ и не пересекает ее, если $c < 2$.

Доказательство. Нас интересует количество решений системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = c \\ xy = 1 \end{cases}.$$

Выражая $y = c - x$ из первого уравнения и подставляя во второе получаем квадратное уравнение $cx - x^2 = 1$ с дискриминантом $D = \dfrac{c^2}{4} - 1$. Откуда получаем, что при $c > 2$ квадратное уравнение имеет два решение (а значит графики пересекаются в двух точках), при $c = 2$ – одно решение (и одна точка пересечения) и при $c < 2$ – решений нет (графики не пересекаются).

Следствие. Прямая $x+y=2$ – касательная к гиперболе, т.к., по определению, касательная есть предельное положение секущей.

Теорема 1.3. *При преобразовании плоскости с помощью гиперболического поворота прямые переходят в прямые, а гиперболы вида* $y=\frac{k}{x}$ *переходят сами в себя и касательные к гиперболам переходят в касательные.*

Доказательство. Рассмотрим какую-либо прямую на плоскости xOy. Она будем иметь уравнение

$$ax+by+c=0.$$

Применим к ней гиперболический поворот с коэффициентом $h>0$. Все точки с координатами (x,y) перейдут в точки с координатами $\left(hx,\frac{y}{h}\right)$ и уравнение прямой перейдет в уравнение

$$ahx+b\frac{y}{h}+c=0,$$

которое тоже является уравнением некоторой прямой на плоскости, отличной от первой при $h\neq 1$.

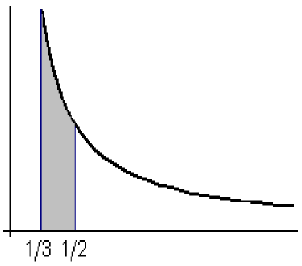
Рассмотрим гиперболу на плоскости xOy – график функции $y=\frac{k}{x}$, $k\neq 0$. Применим к ней гиперболический поворот с коэффициентом $h>0$. Все точки с координатами (x,y) перейдут в точки с координатами $\left(hx,\frac{y}{h}\right)$ и функция гиперболы перейдёт в функцию:

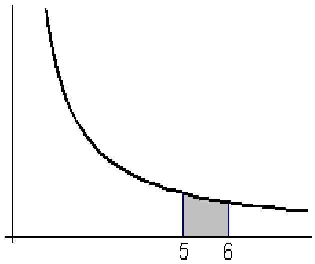
$$\frac{y}{h}=\frac{k}{hx},$$

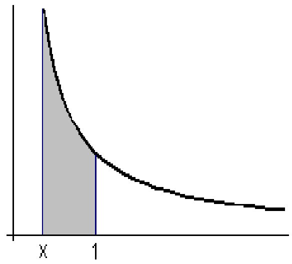
которая является той же самой функцией, той же гиперболы. Если же прямая пересекает рассматриваемую гиперболу в одной точке, то и образ этой прямой делает то же самое. И если прямая не является секущей для гиперболы, то таковым, очевидно будет и ее образ. Поэтому гиперболический поворот переводит касательные к гиперболе в касательные.

Задачи к семинару 1. Логарифм.

1. Найти (выразить с помощью натурального логарифма) площадь закрашенной гиперболической трапеции под графиком функции $y=\frac{1}{x}$:

а) 

б) 

в) 

г) гиперб.сектор

2. Составить уравнение касательной проведённой к графику функции $y=\dfrac{1}{x}$ в точке (4, $\dfrac{1}{4}$).

3. Доказать неравенства $\dfrac{1}{2}<\ln 2<1$.

4. Доказать неравенство $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$.

5. Доказать неравенство $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\ \ (x>-1)$.

6. Доказать неравенства $\dfrac{7}{12}<\ln 2<\dfrac{5}{6}$.

7. Доказать неравенства

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}.$$

8. Доказать неравенство $\ln 3>1$.

9. Доказать неравенства $\dfrac{2}{3}<\ln 2<\dfrac{3}{4}$.

10.Найти $[\ln 100]$

11.Доказать неравенство $\ln(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$, $(x>0)$.

12.Доказать неравенство $\ln\dfrac{x+y}{2}\ge\dfrac{\ln x+\ln y}{2}$.

13.Доказать неравенства $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}<1<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

14.Найти хотя бы одно значение x, удовлетворяющее неравенству $\ln x>10^6$.

15.Найти хотя бы одно натуральное значение n, удовлетворяющее неравенству $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}>10^6$.

16.Доказать, что $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\cdots=\ln 2$.

Летняя школа МФТИ – 2014.
Лекции по математике.
Курс Николаева Ю.П.

2. Гиперболические функции.

Логарифмы по другим основаниям.

Если в определении логарифмов вместо гиперболы $xy=1$ использовать гиперболу $xy=k$ при $k>0$ и $k\neq 1$, то получится функция, удовлетворяющая основному свойству логарифмов, отличающаяся от натурального логарифма постоянным множителем. Все такие функции тоже называются логарифмами и различаются своими основаниями.

Основанием логарифма называется число, логарифм которого равен единице.

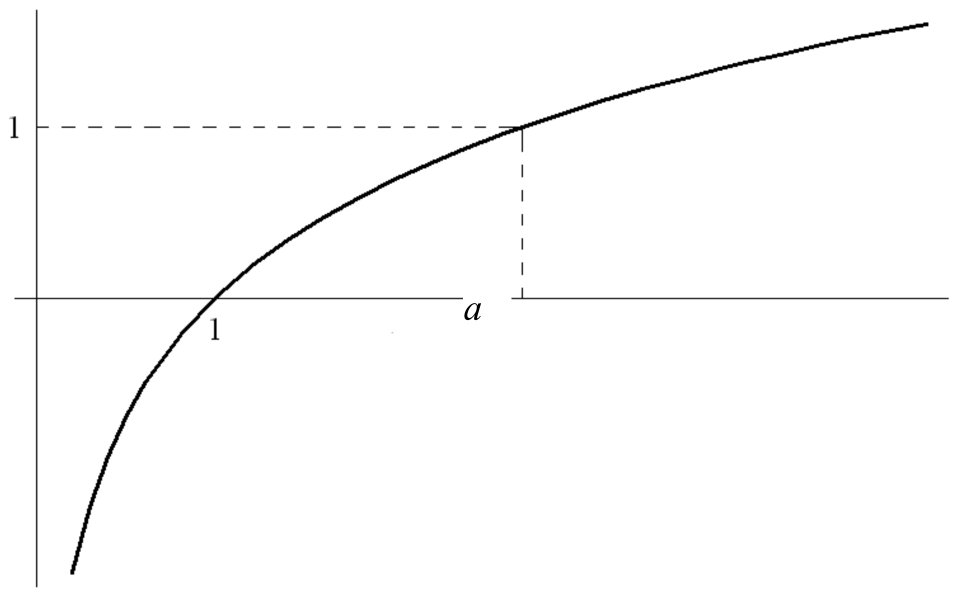
Логарифм числа x с основанием a обозначается $\log_a x$. Так как он отличается от натурального логарифма постоянным множителем, то величину этого множителя можно определить из условия $\log_a a=1$. Откуда

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}. \tag{1}$$

Последнее равенство следует рассматривать как определение логарифма по основанию a. Основанием логарифма может служить любое отличное от единицы положительное число.

Наряду с натуральными логарифмами часто применяются десятичные и двоичные (в информатике) логарифмы. Десятичный логарифм имеет специальное обозначение $\lg$. Десятичный логарифм позволяет определить количество десятичных знаков используемых для записи целого числа.

График логарифма выглядит следующим образом.


1
1
a

Основание натуральных логарифмов.

Основанием натуральных логарифмов является замечательное число e, играющее в математике огромную роль. Число это иррационально и приблизительно равно $2.718281828\ldots$

Для вычисления e можно использовать следующие неравенства

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (2)$$

справедливые при любом натуральном n. Для доказательства этих неравенств мы воспользуемся следующим свойством логарифмов: *неравенство* $x<y$ *для положительных чисел равносильно неравенству для их логарифмов* $\ln x<\ln y$. В силу этого свойства мы получим равносильные (2) неравенства в результате логарифмирования. При логарифмировании воспользуемся вытекающим (по индукции) из основного свойства логарифмов правилом логарифмирования натуральной степени

$$\log a^{n} = n\log a \qquad (3)$$

С учетом этого свойства логарифмирование (2) дает

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad (4)$$

Первое неравенство вытекает из неравенства $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, а второе из $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}$. Оба эти неравенства получаются из сравнения площадей гиперболической трапеции с площадями вписанного и описанного прямоугольников.

Экспонента.

Логарифм неограниченно возрастает и строго монотонен. Поэтому он принимает и ровно один раз любое числовое значение. То есть, уравнение $\ln x = a$ имеет при любом a единственное (и положительное) решение, которое называется *экспонентой* числа a и обозначается $\exp(a)$. Таким образом, определяется обратная функция к логарифму, называемая экспонентой. То есть для любого x имеет место равенство:

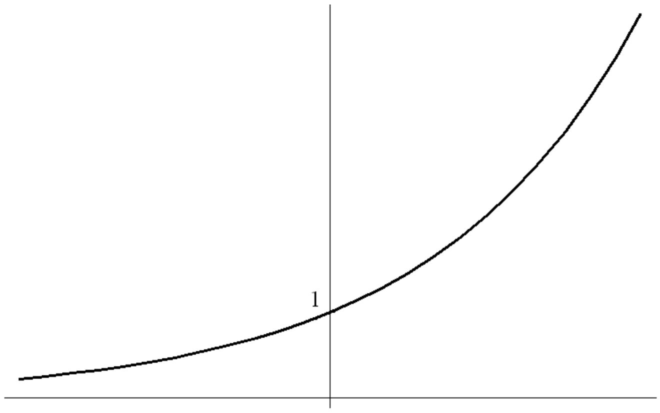
$$\ln(\exp(x)) = x. \qquad (5)$$

Основным свойством экспоненты является следующее правило сложения

$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y). \qquad (6)$$

Для доказательства этого равенства его логарифмируем. Логарифм левой части равен $x+y$ в силу (5). А логарифм правой равен сумме логарифмов множителей, которые равны x и y соответственно. Следовательно, логарифмы обеих частей равны, а значит, и сами они совпадают.

Экспонента – положительная строго возрастающая функция на всей числовой прямой, и ее график выглядит так:



Показательные функции.

Экспонента натурального числа в силу правила сложения для экспоненты вычисляется как $\exp n = (\exp 1)^n = e^n$. Потенцирование равенства

$$\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m\text{ раз}}=\frac{m}{n}$$

приводит к равенству $\exp\frac{m}{n}=\sqrt[n]{e^m}$. Для отрицательных показателей получаем $\exp(-x)=\frac{1}{\exp x}$. Поэтому экспонента совпадает с показательной функцией e^x. А показательная функция a^x является обратной функцией к логарифму по основанию a.

Возведение в степень.

Докажем следующее правило логарифмирования степени

$$\ln a^b = b\ln a. \qquad (7)$$

Так как показательная функция a^x определена как обратная к логарифму по основанию a, то имеем

$$b=\log_a a^b=\frac{\ln a^b}{\ln a},$$

откуда и следует равенство (7). Потенцирование этого равенства приводит к формуле

$$a^b=\exp(b\ln a), \qquad (8)$$

которая позволяет вычислять произвольные степени с помощью логарифма и экспоненты. Последнюю формулу можно рассматривать как определение операции возведения в степень.

Гиперболические синус и косинус.

Гиперболические синус $\operatorname{sh} x$ и *косинус* $\operatorname{ch} x$ определяются следующими формулами:

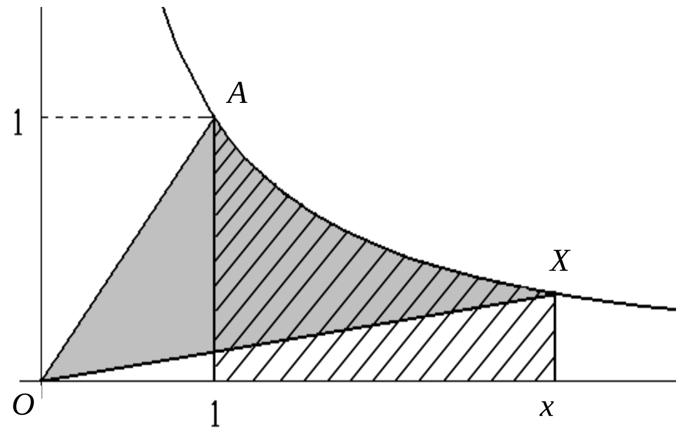
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{9}$$

Их свойства в значительной степени аналогичны свойствам обычных синуса и косинуса. Гиперболический синус – нечетная, а косинус – четная функции. Гиперболическим аналогом основного тригонометрического тождества является

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \tag{10}$$

Гиперболические функции связаны с гиперболой и гиперболическим поворотом также как обычные с окружностью и обычным поворотом.

Для того чтобы продемонстрировать эту связь начнем со следующего замечания. Назовем *гиперболическим сектором* с раствором x фигуру, ограниченную биссектрисой первой четверти, лучом, проходящим через точку X с координатами $\left(x, \frac{1}{x}\right)$, и заключенным между ними куском гиперболы $xy = 1$. Тогда площадь этого сектора равна логарифму x. Действительно, площади прямоугольных треугольников с гипотенузами OX и OA, где A – вершина гиперболы, совпадают и равны $\frac{1}{2}$.



Если теперь наоборот обозначить через x площадь гиперболического сектора, то координаты X будут e^x и e^{-x}. Проекции этой точки на биссектрисы первой и второй четвертей соответственно равны $\frac{e^x + e^{-x}}{\sqrt{2}}$ и $\frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{2}}$. Поэтому если перейти в систему координат $x_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $y_1 = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, то уравнение гиперболы примет вид $x_1^2 - y_1^2 = 2$. Если теперь сжать все в $\sqrt{2}$ раз, то уравнение гиперболы примет канонический вид $x_1^2 - y_1^2 = 1$ площадь сектора станет $\frac{x}{2}$. В этой системе координат координаты точки с площадью сектора $\frac{x}{2}$ (как и в случае с окружностью) будет гиперболические косинус и синус:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ и } \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Аналогично обычной (круговой) тригонометрии гиперболические тангенс и котангенс определяются, как отношения:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \text{ и } \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Семинар 2. Гиперболические функции.

1. Получить и доказать формулу гиперболического синуса суммы.
2. Получить и доказать формулу гиперболического косинуса суммы.
3. Получить и доказать формулу гиперболического тангенса суммы.
4. Получить и доказать формулу произведения двух гиперболических синусов суммы.
5. Получить и доказать формулу гиперболического синуса двойного аргумента.
6. Получить и доказать формулу гиперболического синуса тройного аргумента.
7. Решить уравнение $\operatorname{sh} x = 2$.
8. Решить уравнение $\operatorname{th} x = 4$.
9. Доказать тождество $(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)^n = \operatorname{sh} nx + \operatorname{ch} nx$.
10. Построить графики функций: а) $y = \operatorname{sh} x$, б) $y = \operatorname{ch} x$, в) $y = \operatorname{th} x$.
11. Вычислить: а) $\log_{100} 1000$, б) $\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{2}$.
12. Сравнить: а) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ и $\log_2 \frac{1}{2}$, б) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ и $\log_3 \frac{1}{2}$.
13. Сравнить величины $\log_7 8$ и $\log_8 9$.
14. Решить уравнение: $\log_{\frac{1}{2}} x = 2{,}5$.
15. Решить уравнение: $\log_3\left(x^2 - 3x - 5\right) = \log_3(7 - 2x)$.
16. Решить уравнение: $\lg(x+4) + \lg(2x+3) = \lg(1-2x)$.
17. Решить уравнение: $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0$.
18. Решить уравнение: $2 - \log_{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch} x = \log_{\operatorname{ch} x} \operatorname{sh} x$.
19. Доказать, что уравнение $A \operatorname{sh} x + B \operatorname{ch} x + C = 0$ имеет единственное решение, только если из $|A|$, $|B|$ и $|C|$ можно составить прямоугольный треугольник.