Министерство образования, науки и технологического развития
Математическое общество Сербии

СЕРБСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА УЧАЩИХСЯ СРЕДНИХ ШКОЛ

6 апреля 2013 г.

Второй день

1. Найдите все $n \in \mathbb{N}$ такие, что множество $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ можно разбить на n непересекающихся трехэлементных подмножеств вида $\{a, b, c\}$, в которых $b - a$ и $c - b$ — различные числа из множества $\{n-1, n, n+1\}$.

2. Пусть AA' и BB' — высоты остроугольного треугольника ABC ($AC \neq BC$). Окружность k проходит через точки A' и B' и касается стороны AB в точке D. Оказалось, что треугольники ADA' и BDB' равновелики. Докажите, что

$$\angle A'DB' = \angle ACB.$$

3. Найдите наибольшую константу $K \in \mathbb{R}$, обладающую следующим свойством: если $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ таковы, что для всех $i, j, k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i < j < k \leqslant 4$, справедливо $a_i^2 + a_j^2 + a_k^2 \geqslant 2(a_ia_j + a_ja_k + a_ka_i)$, то

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \geqslant K(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4).$$

Прождолжительность олимпиады 270 минут.
Решения задач должны быть подробно записаны.
Каждая задача стоит 7 баллов.