Регата

Младшая лига

Алгебра и теория чисел

1.1. Вещественные числа x и y таковы, что $x^2+xy+y^2=4$ и $x^4+x^2y^2+y^4=8$. Найдите $x^6+x^3y^3+y^6$.

2.1. Маша пишет в таблицу числа: в первой строчке она пишет число 1, во второй строчке она пишет числа 2 и 3 (2 оказывается под 1), в третьей строчке 4, 5, 6 (4 под 2) и т. д. до тех пор, пока она не напишет 2012. В каком столбце будет наибольшая сумма?

3.1. Вася расставил по кругу числа от 1 до 10 в произвольном порядке и посчитал все суммы трех подряд стоящих чисел. Какое наибольшее значение может принимать наименьшая из этих сумм?

4.1. Найдите все такие натуральные m, что $\{\sqrt{m}\}=\{\sqrt{m+2011}\}$.

Геометрия

1.2. На сторонах AB и BC треугольника ABC нашлись точки X и Y соответственно такие, что $\angle BYX=\angle AYC$ и $\dfrac{BY}{YC}=2\cdot\dfrac{BX}{XA}$. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

2.2. На боковой стороне AB прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AB\perp BC$) построена полуокружность (как на диаметре), которая касается боковой стороны CD в точке K. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Найдите длину отрезка OK, если длины оснований трапеции $ABCD$ равны 2 и 3.

3.2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD оказалось, что $AD=DC=CB<AB$. Точки E и F на сторонах CD и BC соответственно таковы, что $\angle ADE=\angle AEF$. Докажите, что $4CF\leqslant BC$.

4.2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AB=AC$ и $BC=CD$. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а точка X — середина дуги CD, не содержащей точку A. Докажите, что $XO\perp AB$.

Комбинаторика

1.3. Три грани куба $8 \times 8 \times 8$ покрашены в синий цвет, а три другие грани — в красный цвет так, что ни в какой вершине не сходятся три грани одного цвета. Сколько кубиков из этого большого куба имеют как синюю, так и красную грань?

2.3. Олимпиада по математике проводится в два дня, каждый день предлагается одинаковое число задач, пронумерованных от 1 до N. Оказалось, что у каждого школьника количества решенных им задач в первый и второй день отличаются на 1. При этом для каждого номера от 1 до N число школьников, решивших задачи с этим номером в разные дни, отличается на 2. Докажите, что в олимпиаде участвовало четное число школьников.

3.3. В футбольном турнире принимали участие 30 команд. По окончании турнира оказалось, что среди любых трех команд найдутся две, которые в трех матчах внутри этой тройки команд набрали поровну очков (за победу дается 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0). Какое минимальное количество ничьих может быть в таком турнире?

4.3. Имеется множество из 2012 чисел, не все из которых целые. Какое наибольшее количество подмножеств этого множества могут иметь целую сумму (пустое множество не учитывается).

Старшая лига

Алгебра и теория чисел

1.1. Решите в целых числах уравнение $x - y = x^2 + xy + y^2$.

2.1. Найдите наименьшее натуральное число, дающее попарно различные остатки при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

3.1. Функция $f(x)$ такова, что $f(1) = 0$, $f(2n) = f(n) + 1$ и $f(2n+1) = f(2n) - 1$ при $n \in \mathbb{N}$. Найдите сумму $f(1) + f(2) + \ldots + f(127)$.

4.1. Последовательность $\{a_n\}$ определена рекуррентно: $a_1 = \dfrac{1}{2}$ и $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2n \cdot a_{n-1} + 1}$ для $n > 1$. Найдите сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2012}$.

Геометрия

1.2. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки K, L и M. Оказалось, что радиусы описанных окружностей треугольников AKM, BKL, CLM и KLM равны. Докажите, что треугольники ABC и KLM подобны.

2.2. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка X и через нее проведены отрезки PQ и EF, параллельные сторонам квадрата AD и AB соответственно, с концами, лежащими на сторонах квадрата (P на AB, F на AD). Оказалось, что $S_{ECQX} = 2S_{PXFA}$. Чему равен $\angle EAQ$?

3.2. В тетраэдре $SABC$ радиусы описанных окружностей граней SAB, SBC и SAC равны 108. Радиус вписанной сферы этого тетраэдра равен 35, а расстояние от вершины S до ее центра равно 125. Чему равен радиус описанной сферы этого тетраэдра?

4.2. Точки K, L, M и N лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$. Оказалось, что $\angle KLA = \angle LAM = \angle AMN = 45°$. Докажите, что $KL^2 + AM^2 = LA^2 + MN^2$.

Комбинаторика

1.3. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске, чтобы белые не били никого (ни белых, ни черных) по вертикали, а черные — по горизонтали?

2.3. Имеется 2012 палочек с длинами от 1 до 2012. Будем называть тройку палочек *хорошей*, если из них можно составить треугольник и *плохой* в противном случае. Каких троек больше — хороших или плохих?

3.3. На некоторых полях доски 100×100 стоят столбики из шашек. За один ход разрешается переставить любой столбик на столько клеток по вертикали или горизонтали, сколько в нем шашек; если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Вначале на каждой клетке стоит по одной шашке. Можно ли за 9999 ходов собрать их все на одной клетке?

4.3. Сколькими способами куб $n \times n \times n$ можно разрезать на бруски $1 \times 1 \times n$?