Регата (с решениями)

Младшая лига

Алгебра и теория чисел

1.1. Вещественные числа x и y таковы, что $x^2+xy+y^2=4$ и $x^4+x^2y^2+y^4=8$. Найдите $x^6+x^3y^3+y^6$.

Ответ: 19. *Решение.* Раскладывая второе равенство на множители (добавляя и вычитая x^2y^2) имеем $(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)=8$, откуда следует, что $x^2-xy+y^2=2$, откуда $xy=1$ и $x^2+y^2=3$. Тогда $x^6+x^3y^3+y^6=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)+(xy)^3=3((x^2+y^2)^2-3(xy)^2)+1=19$.

2.1. Маша пишет в таблицу числа: в первой строчке она пишет число 1, во второй строчке она пишет числа 2 и 3 (2 оказывается под 1), в третьей строчке 4, 5, 6 (4 под 2) и т. д. до тех пор, пока она не напишет 2012. В каком столбце будет наибольшая сумма?

Ответ: в 10 столбце. *Решение.* Заметим, что $1+2+\ldots+63=\dfrac{63\cdot 64}{2}=2016$. Значит, в таблице будет 63 строки, причем в последней строке не будет хватать чисел 2014, 2015, 2016 до полной таблицы. Будем для простоты полагать, что они присутствуют, как мы увидим, это не повлияет на ответ. Сравним сумму чисел в k-ом и $k+1$-столбце. В $k+1$ столбце ровно $63-k$ чисел, которые на 1 больше стоящих рядом с ними чисел k-ого столбца. Однако в k-ом столбце есть на одно число больше, и это число $\dfrac{k(k+1)}{2}$. Значит, пока $63-k>\dfrac{k(k+1)}{2}$ сумма чисел в столбце будет возрастать. Первый раз это неравенство будет нарушаться при $k=10$ и значит сумма в десятом столбце будет самой большой. Добавленные в начале числа, как мы видим, не повлияли на результат.

3.1. Вася расставил по кругу числа от 1 до 10 в произвольном порядке и посчитал все суммы трех подряд стоящих чисел. Какое наибольшее значение может принимать наименьшая из этих сумм?

Решение. Заметим, что сумма всех 10 троек подряд стоящих чисел — это утроенная сумма всех чисел, то есть 165. Значит средняя сумма в каждой тройке — это $165/10=16{,}5$. Покажем, что сделать, чтобы минимальная сумма была 16 тоже невозможно. Так как среднее значение суммы 16,5 — это означает, что тройки суммарно могут превысить сумму 16 всего на 5. Но заметим, что соседние тройки (которые имеют два общих числа) не могут иметь равные суммы (иначе бы первое число первой тройки равнялось бы последнему числу соседней тройки). Но тогда единственным вариантом было бы чередование троек с суммой 16 и 17, что привело бы к тому, что числа через два отличаются на один, но тогда числа через 5 получаются равными. Для суммы пятнадцать имеется пример: 1, 8, 7, 5, 3, 10, 2, 4, 9, 6 по кругу.

4.1. Найдите все такие натуральные m, что $\{\sqrt{m}\} = \{\sqrt{m+2011}\}$.

Ответ: 1005^2. *Решение.* Перепишем уравнение в виде $\sqrt{m} - [\sqrt{m}] = \sqrt{m+2011} - [\sqrt{m+2011}]$, откуда $\sqrt{m+2011} - \sqrt{m} = [\sqrt{m+2011}] - [\sqrt{m}] = p \in \mathbb{N}$. Возводя равенство $\sqrt{m+2011} = \sqrt{m} + p$ в квадрат, имеем $2011 = p^2 + 2p\sqrt{m}$. Отсюда ясно, что число $\sqrt{m}$ рациональное, а, значит, целое. Пусть тогда $k = \sqrt{m}$, откуда $2011 = p(p+2k)$. Так как 2011 — простое, получаем, что $p = 1$, а $k = 1005$. Значит $m = k^2 = 1005^2$.

Геометрия

1.2. На сторонах AB и BC треугольника ABC нашлись точки X и Y соответственно такие, что $\angle BYX = \angle AYC$ и $\dfrac{BY}{YC} = 2 \cdot \dfrac{BX}{XA}$. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

Решение. Отразим симметрично точку Y относительно точки C в точку Y' (см. рис. 1). Тогда, так как отрезок YY' в два раза больше отрезка YC будет выполнено равенство $\dfrac{BY}{YY'} = \dfrac{BX}{XA}$, а следовательно, по теореме Фалеса $XY \parallel AY'$. Значит, $\angle AYY' = \angle XYB = \angle AY'Y$. Следовательно, треугольник AYY' равнобедренный. Следовательно, проведённая в нём медиана AC является и высотой, что означает, что угол C прямой, ч. т. д.

2.2. На боковой стороне AB прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AB \perp BC$) построена полуокружность (как на диаметре), которая касается боковой стороны CD в точке K. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Найдите длину отрезка OK, если длины оснований трапеции $ABCD$ равны 2 и 3.

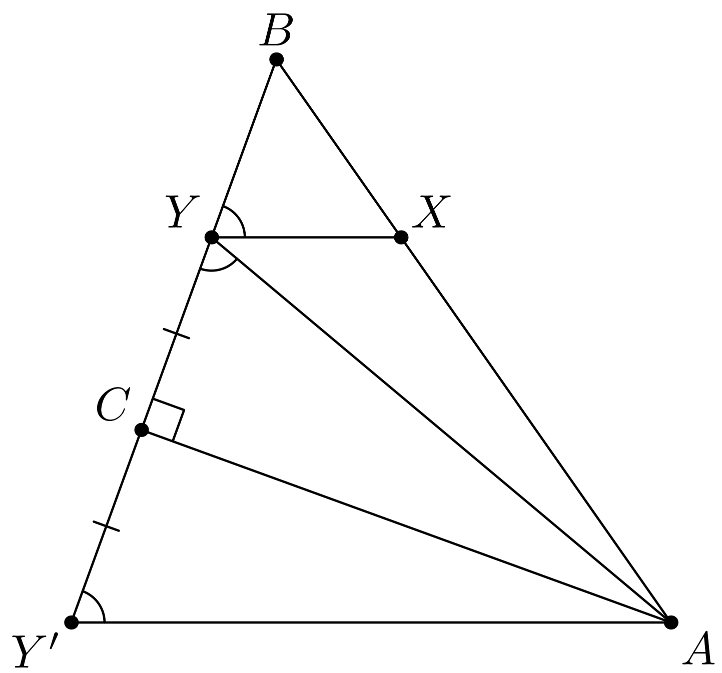

Рис. 1: К задаче 1.2

Ответ: $OK = 6/5$. *Решение.* Заметим, что $CK = BC = 2$ и $DA = DK = 3$ по свойствам касательных, проведённых к окружности (см. рис. 2). Так как треугольники BCO и DAO подобны по двум углам ($\angle CBO = \angle ADO$ как накрест лежащий), то $BO/OD = BC/AD = 2/3$. По доказанному $CK/KD = 2/3$. Значит, по теореме Фалеса $BC \parallel OK$. Значит, треугольники DOK и DBC подобны и по свойству подобия треугольников имеем $OK/BC = DK/DC = 3/5$, откуда имеем $OK = 6/5$.

3.2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD оказалось, что $AD = DC = CB < AB$. Точки E и F на сторонах CD и BC соответственно таковы, что $\angle ADE = \angle AEF$. Докажите, что $4CF \leqslant BC$.

Решение. Так как трапеция равнобокая, то $\angle C = \angle D$. Заметим, что $\angle CEF + \angle FEA + \angle AED = 180°$, а также $\angle EDA + \angle DAE + \angle AED = 180°$. Вычитая одно равенство из другово получаем $\angle CEF = \angle DAE$ (см. рис. 3). Следовательно, треугольники CEF и DAE подобны. Обозначим длину отрезка CE через x, а ED — через y. Тогда из свойств подобных треугольников $CF/CE = ED/DA$. То есть $CF = \dfrac{ED \cdot CE}{DA} = \dfrac{x \cdot y}{x+y}$ (мы воспользовались тем, что $DA = CD = x + y$). Утверждение задачи равносильно неравенству $4 \leqslant CB/CF = \dfrac{(x+y)^2}{xy}$. Для доказательства этого неравенства проведём следующую цепочку равносильных преобразований: $4 \leqslant \dfrac{(x+y)^2}{xy} \Leftrightarrow 4xy \leqslant x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geqslant 0$.

4.2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AB = AC$ и $BC = CD$. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а точка X — середина дуги CD, не содержащей точку A. Докажите, что $XO \perp AB$.

Решение. Докажем, что O — точка пересечения высот треугольника ABX (см. рис.

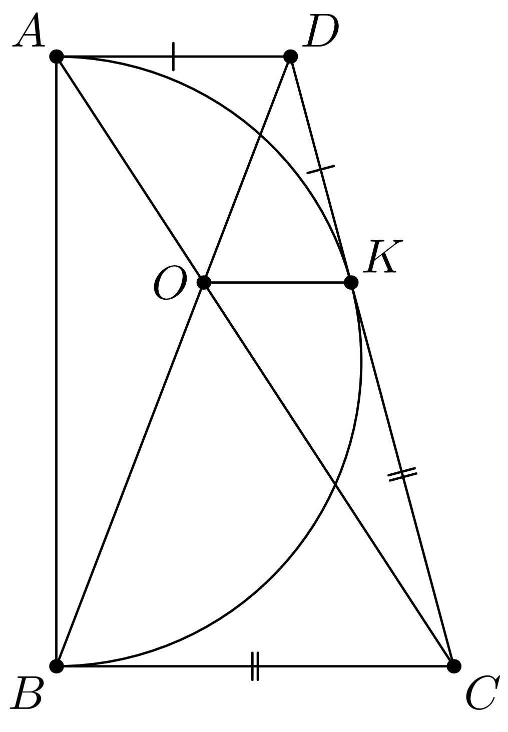

Рис. 2: К задаче 2.2

4). Для этого достаточно доказать, что O лежит на высотах, проведённых из вершин A и B. Обозначим половину угла CAB через α. Тогда $\angle CAB = \angle CDB = \angle DBC = \angle DAC = 2\alpha$ как углы опирающиеся на одну и ту же дугу, а $\angle BCA = \angle CBA = 90^\circ - \alpha$ так как треугольник ABC равнобедренный. Из определения точки X следует, что $\angle DBX = \angle XBC = \angle XAC = \angle DAX = \alpha$. Так как $\angle ACB + \angle XBC = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$ и $\angle ADB + \angle DAX = \angle ACB + \angle DAX = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$, то углы между парами хорд AC, BX и BD, AX прямые. Из того, что O — точка пересечения высот треугольника ABX следуюет, что XO — высота, ч. т. д.

Комбинаторика

1.3. Три грани куба $8 \times 8 \times 8$ покрашены в синий цвет, а три другие грани — в красный цвет так, что ни в какой вершине не сходятся три грани одного цвета. Сколько кубиков из этого большого куба имеют как синюю, так и красную грань?

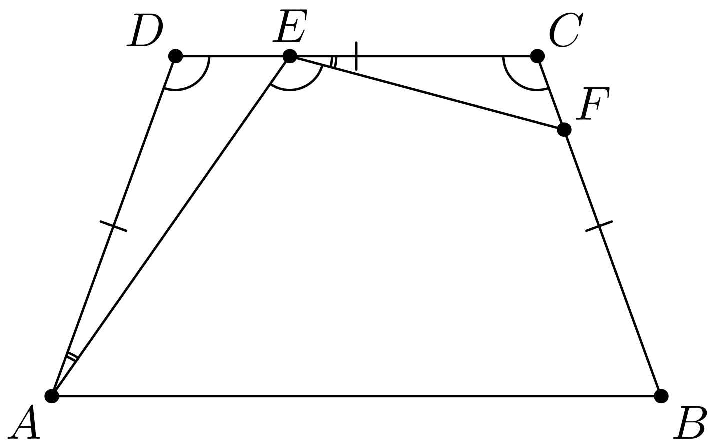

Рис. 3: К задаче 3.2

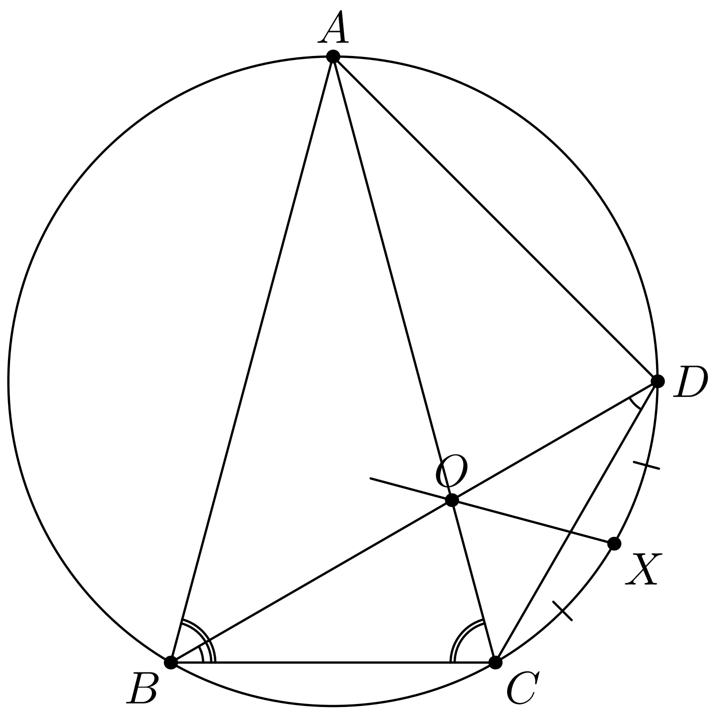

Рис. 4: К задаче 4.2

Решение. Заметим, что требуемые кубики присутствуют в точности вдоль восьми ребер. Тогда из количество равно 56.

2.3. Олимпиада по математике проводится в два дня, каждый день предлагается одинаковое число задач, пронумерованных от 1 до N. Оказалось, что у каждого школьника количества решенных им задач в первый и второй день отличаются на 1. При этом для каждого номера от 1 до N число школьников, решивших задачи с этим номером в разные дни, отличается на 2. Докажите, что в олимпиаде участвовало четное число школьников.

Решение. Посчитаем число задач, решенных всеми участниками. Заметим, что для каждого участника число решенных им за два дня задач нечетно (так как равно $k + (k + 1)$). Однако, каждую пару задач с одинаковыми номера решили четное число школьников $(m + (m + 2))$. Это означает, что общее число задач, решенное всеми школьниками четно, откуда следует, что и число участников турнира тоже четно — ведь каждый вкладывает в общую сумму нечетное число задач.

3.3. В футбольном турнире принимали участие 30 команд. По окончании турнира оказалось, что среди любых трех команд найдутся две, которые в трех матчах внутри этой тройки команд набрали поровну очков (за победу дается 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0). Какое минимальное количество ничьих может быть в таком турнире?

Решение. Выберем произвольную команду A и разобьем все команды на три группы: команды, выигравшие у A, команды, проигравшие A, и команды, сыгравшие с A вничью. К последней группе мы добавим и команду A. Заметим, что любые две команды и одной группы сыграли вничью — это легко следует из условия. Пусть в группах a, b и c команд. Тогда число ничьих не меньше, чем

$$\frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} + \frac{c(c-1)}{2} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 - 30).$$

Сумма чисел a, b и c равна 30, поэтому сумма квадратов минимальна, если все числа равны. Отсюда следует, что ничьих не меньше, чем 135. Пример получается, когда описанные группы действительно содержат ровно по 10 команд и команды групп выигрывают друг у друга по циклу.

4.3. Имеется множество из 2012 чисел, не все из которых целые. Какое наибольшее количество подмножеств этого множества могут иметь целую сумму (пустое множество не учитывается).

Ответ: $2^{2011} - 1$. *Решение.* Пример: все числа на карточках, кроме одного - целые. Оценка: Зафиксируем нецелое число K и разобьем все наборы на пары, отличающиеся только наличием карточки K. Получится $2^{2011} - 1$ пара, и отдельный набор из одного числа K. В каждой паре не более одного набора с целой суммой — если один целый, то второй (плюс-минус число на K) — уже нет.

Старшая лига

Алгебра и теория чисел

1.1. Решите в целых числах уравнение $x - y = x^2 + xy + y^2$.

Решение. Перепишем это как квадратное уравнение, относительно x: $x^2 + (y-1)x + y^2 + y = 0$. Дискриминант равен $1 - 3y(y+2)$. Ясно, что при $y \geqslant 1$ и $y \leqslant -3$ это число отрицательно, то есть решений нет. При $y = 0$ получаем $x = 0$ или $x = 1$. При $y = -1$ получаем $x = 0$ или $x = 2$. Наконец, при $y = -2$ получаем $x = 1$ или $x = 2$. Таким образом, ответом является шесть пар: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(2,-1)$, $(1,-2)$ и $(2,-2)$.

2.1. Найдите наименьшее натуральное число, дающее попарно различные остатки при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Решение. Изучим все числа, которые обладают таким свойством. Обозначим рассматриваемое нами число с данным свойством через N. Если такое число четное, то его остаток от деления на 4 — это 2. Тогда остаток от деления на 6 — это 4, ..., остаток от деления на 10 — это 8. Тогда остаток от деления на 3 — это 1, от деления на 5 — это 3, и т. д. Таким образом, если N четное, то $N+2$ делится на все числа от 2 до 10, и значит $N \geqslant [2,3,\ldots,10] - 2$. Теперь пусть N нечетно. Аналогично получаем, что N дает остаток 3 от деления на 4, остаток 5 от деления на 6 и т. д. Далее N дает остаток 2 от деления на 3 (так как N дает остаток 5 от деления на 6) и остаток 4 от деления на 5. Остаток от деления на 9 может быть равен только 8 (так как N не делится на 3 и нечетные остатки заняты), а для остатка от деления на 7 остаются 2 варианта: 0 и 6. В первом случае $N+1$ делится на все числа от 2 до 10, и значит $N \geqslant [2,3,\ldots,10] - 1$. Во втором получаем, что $N+1$ кратно $[2,3,4,5,6,8,9,10] = 360$ и дает остаток 1 от деления на 7. Наименьшее такое число — это 1800, и значит $N = 1799$ будет ответом.

3.1. Функция $f(x)$ такова, что $f(1) = 0$, $f(2n) = f(n) + 1$ и $f(2n+1) = f(2n) - 1$ при $n \in \mathbb{N}$. Найдите сумму $f(1) + f(2) + \ldots + f(127)$.

Ответ: 321. *Решение.* Легко понять, рассуждая по индукции, что $f(n)$ — это количество нулей в двоичной записи числа. Действительно, условие $f(1) = 0$ — это база, а переход от n к $2n$ и от $2n$ к $2n+1$ осуществляется с помощью данных соотношений. Заметим также, что $127 = 1111111_2$, то мы суммируем значения f для всех не более чем семизначных (в двоичной записи) чисел. Посчитаем, сколько раз встретится ноль на k-ом месте. На местах с $k+1$ до 7 возможны все варианты (их 2^{7-k}) на местах с первого по $k-1$ возможны все варианты, кроме одного (все нули), их $2^{k-1} - 1$. На первом месте ноль невозможен, значит надо просуммировать слагаемые вида $(2^{k-1} - 1)2^{7-k}$ по всем k от 2 до 7. Получается 321.

4.1. Последовательность $\{a_n\}$ определена рекуррентно: $a_1 = \dfrac{1}{2}$ и $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2n \cdot a_{n-1} + 1}$ для $n > 1$. Найдите сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2012}$.

Ответ: $\dfrac{2012}{2013}$. *Решение.* Введем в рассмотрение последовательность $b_n = \dfrac{1}{a_n}$. Для нее рекуррентное соотношение переписывается в виде $b_n = b_{n-1} + 2n$. Значит $b_n = 2 + 4 + \ldots + 2n = n(n+1)$, откуда $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Складывая такие число по всем n от 1 до 2012 получаем, что сумма равна $\dfrac{2012}{2013}$.

Геометрия

1.2. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки K, L и M. Оказалось, что радиусы описанных окружностей треугольников AKM, BKL, CLM и KLM равны. Докажите, что треугольники ABC и KLM подобны.

Решение. См. рис. 5. Пусть R — указанный радиус. По теореме синусов $KL = 2R\sin\angle B = 2R\sin\angle KML$. Отсюда $\angle KML = \angle B$ или $\angle KML = 180^\circ - \angle B$ (дополнителен к $\angle B$). Аналогично, $\angle KLM = \angle A$ или $\angle KLM = 180^\circ - \angle A$, $\angle LKM = \angle C$ или $\angle LKM = 180^\circ - \angle C$. Если дополнительных углов нет, то углы равны и треугольники подобны. Если дополнительный — один, скажем, $180^\circ - \angle A$, то, суммируя углы треугольников ABC и KLM, получим $\angle A = 180^\circ - \angle A$ — опять все углы равны. Если дополнительных два, то получим, например, $\angle B + \angle C = 360^\circ - \angle B - \angle C$, откуда $\angle B + \angle C = 180^\circ$, что невозможно. При трех дополнительных углах $\angle A + \angle B + \angle C = 540^\circ - \angle A - \angle B - \angle C$, противоречие.

2.2. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка X и через нее проведены отрезки PQ и EF, параллельные сторонам квадрата AD и AB соответственно, с концами, лежащими на сторонах квадрата (P на AB, F на AD). Оказалось, что $S_{ECQX} = 2S_{PXFA}$. Чему равен $\angle EAQ$?

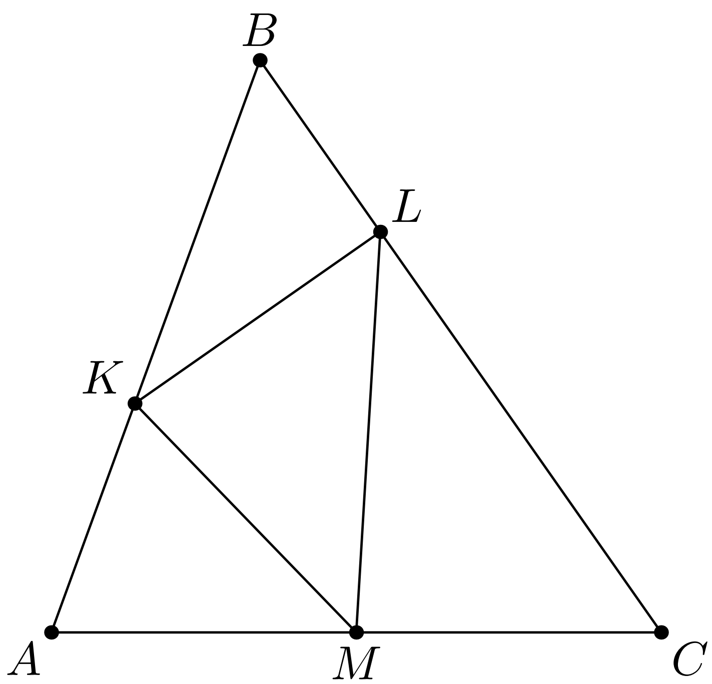

Рис. 5: К задаче 1.2

Ответ: 45°. *Решение.* См. рис. 6. Обозначим сторону квадрата через a, а длины отрезков AF и AP через x и y соответственно. Тогда длины отрезокв EC и CQ равны $a-x$ и $a-y$ соответственно. Условие на площади можно переформулировать так: $EC \cdot CQ = AF \cdot AP$ или $(a-x)(a-y) = 2xy$. Запишем тангенсы углов BAE и QAD: $\operatorname{tg}\angle BAE = \dfrac{BE}{AB} = \dfrac{x}{a}$, $\operatorname{tg}\angle QAD = \dfrac{DQ}{AD} = \dfrac{y}{a}$. Теперь найдём тангенс суммы этих углов:
$\operatorname{tg}(\angle EAB + \angle QAD) = \dfrac{\operatorname{tg}\angle EAB + \operatorname{tg}\angle QAD}{1 - \operatorname{tg}\angle EAB \cdot \operatorname{tg}\angle QAD} = \dfrac{x/a + y/a}{1 - x/a \cdot y/a} = \dfrac{a(x+y)}{a^2 - xy}$. Но из уравнения на площади имеем $2xy = (a-x)(a-y) = a^2 - a(x+y) + xy \Leftrightarrow a(x+y) = a^2 - xy$. То есть $\operatorname{tg}(\angle EAB + \angle QAD) = 1$. А значит, так как сумма этих углов очевидно меньше 90° их сумма равна 45°. Значит, угол $\angle EAD = \angle BAD - \angle BAE - \angle QAD = 90^\circ - (\angle BAE + \angle QAD) = 45^\circ$.

3.2. В тетраэдре $SABC$ радиусы описанных окружностей граней SAB, SBC и SAC равны 108. Радиус вписанной сферы этого тетраэдра равен 35, а расстояние от вершины S до ее центра равно 125. Чему равен радиус описанной сферы этого тетраэдра?

Ответ: 112,5. *Решение.* Обозначим центр описанной сферы через O, а вписанной через I. Опустим перпендикуляры из O на грани тетраэдра. Тогда их основаниями будут являться центры описанных окружностей этих граней. Обозначим центр описанной окружности треугольника SBC через O_A. Тогда так как $O_AO \perp SBC$, то по теореме Пифагора имеем $SO^2 = SO_A^2 + O_AO^2$. Значит, $O_AO = \sqrt{SO^2 - SO_A^2}$. Аналогично для других центров. Значит, O равноудалена от граней SAB, SBC и SAC. То есть существует сфера с центром в O и касающаяся плоскостей SAB, SBC и SCA. Но тогда эта сфера гомотетична вписанной сфере тетраэдра с центром в точке S. Следовательно, что треугольник SOO_A подобен треугольнику SII_A,

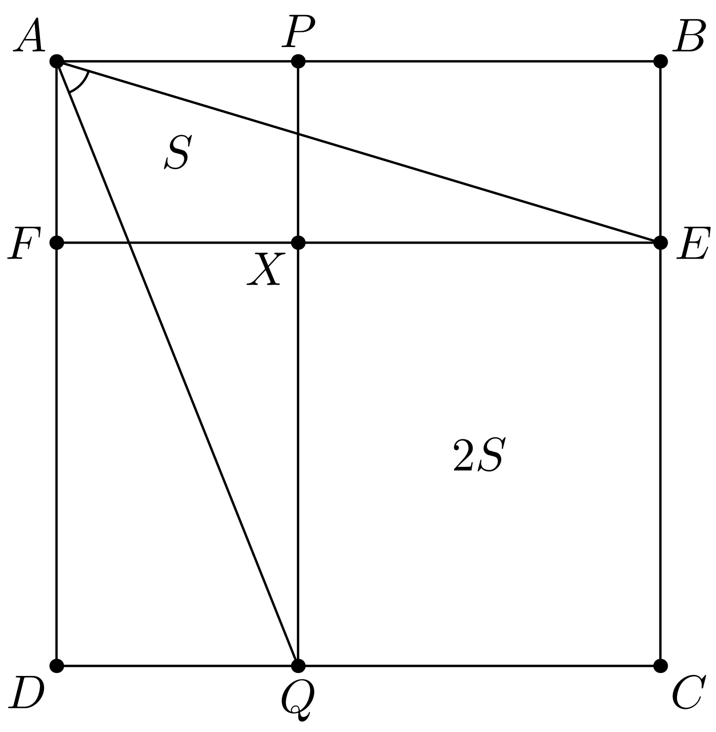

Рис. 6: К задаче 2.2

где I_A — точка касания вписанной сферы с гранью SBC. Находим из подобия $SO = SO_A \cdot SI/SI_A = \dfrac{108 \cdot 125}{\sqrt{125^2 - 35^2}} = \dfrac{27 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 25}{5 \cdot 8 \cdot 3} = 112,5.$

4.2. Точки K, L, M и N лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$. Оказалось, что $\angle KLA = \angle LAM = \angle AMN = 45^\circ$. Докажите, что $KL^2 + AM^2 = LA^2 + MN^2$.

Решение. См. рис. 7. Заметим, что требуемое равенство эквивалентно $AM^2 - MN^2 = LA^2 - LK^2$, что, в свою очередь, можно расписать по теореме Пифагора: $AD^2 + DM^2 - (DN^2 + DM^2) = AB^2 + BL^2 - (KB^2 + BL^2) \Leftrightarrow AD^2 - DN^2 = AB^2 - KB^2 \Leftrightarrow DN = KB$. Теперь будем доказывать именно это равенство. Сделаем поворот с центром в точке A на 90° так, чтобы точка B перешла в D. Тогда, так как прямая AB перейдёт в прямую AD, наша цель — доказать, то K перешла в N. Обозначим образ точки L через L', а точки K — через K'. Поскольку L лежала на BC, то теперь L' лежит на DC. Так как $\angle NMA = \angle MAL$, то $AL \parallel NM$. Аналогично $KL \parallel AM$. Значит, после поворота имеем $AL' \perp NM$, $K'L' \perp AM$ и $AK' \perp L'M$. То есть K' есть точка пересечения высот треугольника $AL'M$. Следовательно, K' лежит на AD и на MN. То есть $K' = N$, что и требовалось.

Комбинаторика

1.3. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске, чтобы белые не били никого (ни белых, ни черных) по вертикали, а черные — по горизонтали?

Ответ: 14 ладей. *Решение.* Пример: запретим занимать левую нижнюю клетку, и поставим 7 черных ладей на все остальные клетки левой вертикали и 7 белых ладей

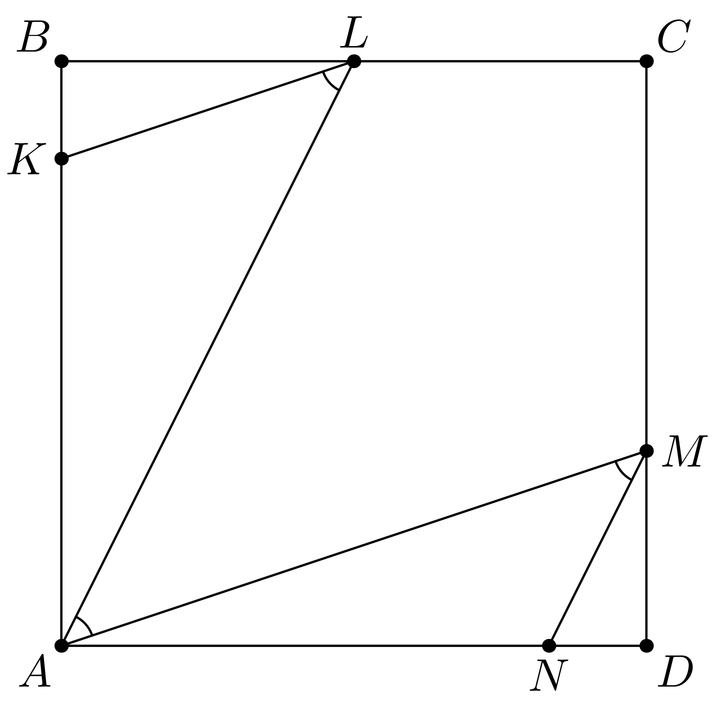

Рис. 7: К задаче 4.2

на все остальные клетки нижней горизонтали. Если есть не менее 15 ладей, то можно выбрать 8 ладей одного цвета, скажем белых. Либо они занимают все вертикали, и тогда больше ладей нет, либо две стоят на одной вертикали и кого-то бьют.

2.3. Имеется 2012 палочек с длинами от 1 до 2012. Будем называть тройку палочек *хорошей*, если из них можно составить треугольник и *плохой* в противном случае. Каких троек больше — хороших или плохих?

Ответ: Больше плохих наборов. *Решение.* Сопоставим набору (a, b, c), где $a < b < c$, набор $(c-b, c-a, c)$. Набор, где $a+b=c$, перейдет в себя. Остальные наборы разобьются на пары переходящих друг в друга. При этом если набор (a, b, c) — хороший, то он перейдёт в плохой. Действительно, $a+b-c>0$, поэтому $(c-b)+(c-a) = c-(a+b-c) < c$. Итак, все одиночки и по одному набору из каждой пары — плохие, поэтому плохих наборов больше.

3.3. На некоторых полях доски 100×100 стоят столбики из шашек. За один ход разрешается переставить любой столбик на столько клеток по вертикали или горизонтали, сколько в нем шашек; если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Вначале на каждой клетке стоит по одной шашке. Можно ли за 9999 ходов собрать их все на одной клетке?

Решение: Нельзя. Допустим противное: удалось собрать все шашки на клетке K. Рассмотрим все ходы на клетку K. Каждым ходом число свободных клеток должно увеличиваться на 1, поэтому освободившаяся клетка больше не занимается. Следовательно, на K сделано не более 198 ходов — из клеток, находящихся с K на одной вертикали или горизонтали. Сумма расстояний от K до этих клеток не превосходит $2 \cdot (1+2+\ldots+99) = 9900$, поэтому на ней может собраться не более 9901 шашек.

4.3. Сколькими способами куб $n \times n \times n$ можно разрезать на бруски $1 \times 1 \times n$?

Ответ: $3(2^n-1)$. *Решение.* Длинные стороны брусков параллельны ребрам куба, таких направлений — три. Допустим, в разбиении нашлись три бруска B_1, B_2, B_3 трех разных направлений. Проведем через B_1 слой $1 \times n \times n$ параллельно B_2, через B_2 — слой параллельно B_3, через B_3 — параллельно B_1. Слои не параллельны, поэтому пересекутся по какому-то кубику K (см. рис). K не принадлежит ни одному из брусков, так как каждый брусок не лежит в одном из слоев. Однако видно, что какое бы направление ни было у проходящего через K бруска, он пересечется с одним из B_1, B_2, B_3. Противоречие. Значит, для любого разбиения есть бруски не более чем двух направлений, и куб можно разбить на параллельные им слои. При подсчете числа разбиений будем сначала выбирать направление слоев (тут есть 3 способа), а затем — направление брусков в каждом слое (2 способа). Итого получим $3 \cdot 2^n$ разбиений. Однако три разбиения — те, где все бруски параллельны друг другу — сосчитаны по 2 раза, их надо вычесть.