Личная письменная олимпиада «Геометрия» (с решениями)

Младшая лига

1. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в ее середине M. Так же известно, что $\angle BDC = 90^\circ$. Найдите углы параллелограмма $ABCD$.

Ответ: $\angle A = \angle C = 60^\circ$, $\angle B = \angle D = 120^\circ$. *Решение.* См. рис. 1. Так как $BM \parallel AD$, то углы DAM и AMB равны как накрест лежащие. Так как AM — биссектреса угла A, то получаем, что $\angle BAM = \angle AMB$. Значит, треугольник ABM равнобедренный. Следовательно, $AB = BM$. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$. Проведем медиану DM треугольника BCD. Так как это медиана, проведенная к гипотенузе, то она равна половине стороны BC, то есть $DM = MC$. Имеем $DM = MC = MB = AB = CD$. Значит, треугольник CDM равносторонний. Следовательно, угол C равен 60°.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали перпендикулярны. Точки K и L на боковых сторонах AB и CD соответственно таковы, что отрезок KL проходит через точку пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ и параллелен ее основаниям. На боковой стороне AB отмечена точка M такая, что $AM = BK$. Докажите, что $LM = AB$.

Решение. См. рис. 2. Обозначим через O точку пересечения диагоналей трапеции. Покажем, что $KO = OL$. Действительно, $\dfrac{KO}{BC} = \dfrac{AK}{AB}$ из подобия треугольников AKO и ABC. Далее, $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{DL}{DC}$ из теоремы Фалеса. Наконец, $\dfrac{DL}{DC} = \dfrac{OL}{BC}$, на этот раз из подобие треугольников DOL и DBC. Соединяя все эти равенства, имеем $KO = OL$. Теперь обозначим середину боковой стороны AB через T, по условию она

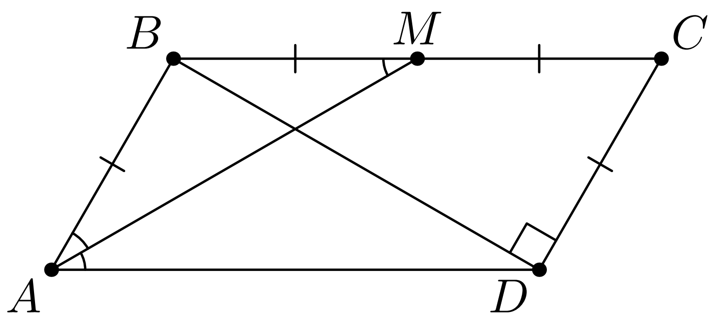

Рис. 1: К задаче 1

же будет серединой отрезка KM. Тогда TO — средняя линия треугольника MKL, откуда $ML = 2TO$. С другой стороны, отрезок TO является медианой прямоугольного треугольника BOA (он прямоугольный в силу перпендикулярности диагоналей), откуда следует что $2TO = AB$, так как медиана прямоугольного треугольника в два раза меньше его гипотенузы. Сопоставляя эти два равенства, получаем требуемое.

3. Вписанная окружность равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) касается его боковых сторон BC и AB в точках E и F. Через точку A проведен внутри угла EAB луч, пересекающий вписанную окружность в точках P и Q. Прямые EP и EQ пересекают прямую AC в точках P' и Q'. Докажите, что $P'A = Q'C$.

См. рис. 3.

Первое решение. Пусть D — точка касания вписанной окружности со стороной AC, точка Q лежит на дуге FE, не содержащей D, а точка P — на дуге FD, не содержащей E. Тогда точка Q' лежит на продолжении стороны AC за точку C, а P' лежит на продолжении стороны AC за точку A. Докажем, что $\angle P'FA = \angle Q'EC$, тогда треугольники $Q'FA$ и $P'EC$ равны по стороне $FA = (AD = DC) = EC$ (это следует того, что точка касания основания вписанной окружностью в равнобедренном треугольнике совпадает со серединой) и равных пар углов $\angle P'FA = \angle Q'EC$ и $\angle FAP' = \angle ECQ'$ (последние углы дополняют до 180^o углы при основании равнобедренного треугольника). Отсюда $Q'A = CP'$. Итак, покажем, что $\angle P'FA = \angle Q'EC$. Заметим, что около четырехугольника $P'FPA$ можно описать окружность, так как $\angle PP'A = \angle PEF = \angle AFP$ (первое равенство следует из равенства вертикальных углов при параллельных прямых FE и $P'A$ и секущей PE, а второе — как равенство угла между касательной и хордой и угла, опирающегося на эту хорду). Теперь $\angle Q'EC = \angle QEB = \angle QPE = \angle PP'A = \angle P'FA$ (первое и третье равенства — это

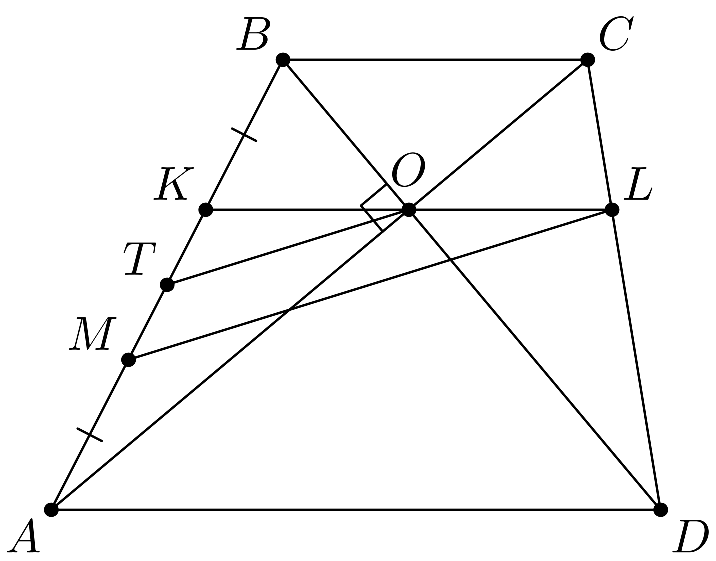

Рис. 2: К задаче 2

равенства вертикальных углов, второе — равенство угла между касательной и хордой и угла, опирающегося на эту хорду, а четвертое — равенство углов, опирающихся на одну дугу $P'A$ в вписанном четырехугольнике $P'FPA$). Полученное равенство завершает доказательство.

Второе решение. Отметим точку касания вписанной окружности со стороной AC, точку D. Так как треугольник равнобедренный, то $DA = DC$. Следовательно, утверждение задачи равносильно равенству $DP' = DQ'$. Заметим, что четырехугольник $FPDQ$ гармонический, поскольку касательные в точках F и D пересекаются на его диагонали PQ. Значит, двойное отношение точек $(F, P; D, Q)$ равно -1. Спроектируем эту четверку из точки E на прямую AC. P перейдет в P', Q перейдет в Q', D в себя, F в бесконечно удаленную точку прямой AC. Следовательно, так как двойное отношение останется гармоническим, D будет серединой $P'Q'$.

4. Верно ли, что любой треугольник площади 3 можно покрыть выпуклым многоугольником площади 5, имеющим ось симметрии?

Решение. Пусть нам дан треугольник ABC. Не умаляя общности обозначим длины его сторон BC, AC и AB через $a \geqslant b \geqslant c$ соответственно. Отложим на луче AB точку D такую, что $AD = AC = b$. Тогда треугольник CAD равнобедренный, а следовательно, имеет ось симметрии (серединный перпендикуляр к основанию). Проведем из точки C высоту CH на сторону AB и обозначим ее длину через h. Тогда $S_{ABC} = \dfrac{h \cdot c}{2}$, а $S_{CAD} = \dfrac{h \cdot b}{2}$. То есть $\dfrac{S_{CAD}}{S_{ABC}} = \dfrac{h \cdot b}{2} \cdot \dfrac{2}{h \cdot c} = \dfrac{b}{c}$. Аналогично можно построить равнобедренный треугольник с вершиной в точке C и двумя сторонами, равными a, и площадью, превосходящей S_{ABC} в $\dfrac{a}{b}$ раз. Нам осталось показать, что либо $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{5}{3}$, либо $\dfrac{b}{c} \leqslant \dfrac{5}{3}$. Предположим противное. Тогда $\dfrac{5}{3}b < a$ и $c < \dfrac{3}{5}b$. Отсюда

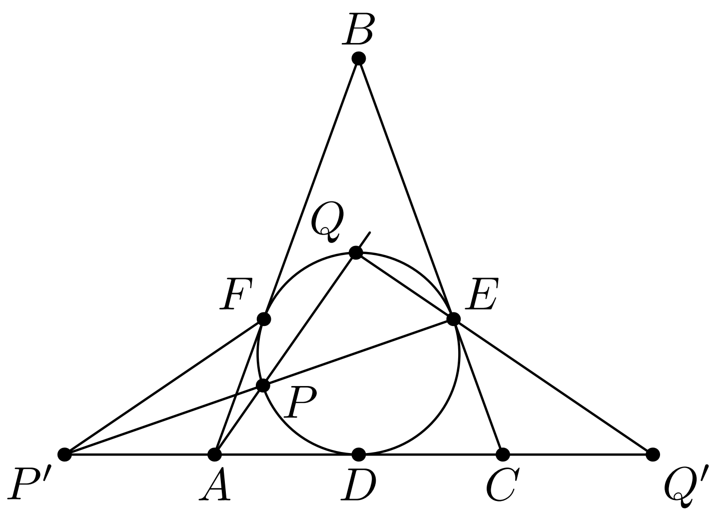

Рис. 3: К задаче 3

$\frac{5}{3}b < a < b + c < b + \frac{3}{5}b = \frac{8}{5}b$. Получаем противоречие так, как $\frac{8}{5} < \frac{5}{3}$.

Старшая лига

1. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На гипотенузе AB отмечена ее середина M. На стороне CB выбрана точка Q такая, что $\frac{BQ}{QC} = 2$. Докажите, что $\angle QAB = \angle QMC$.

Решение. См. рис. 4. Пусть A' — точка, симметричная точке A относительно C. Тогда BC — медиана в треугольнике $AA'B$. Так как точка пересечения медиан делит каждую из медиан в отношении $2 : 1$, то Q является точкой пересечения медиан треугольника $AA'B$. Значит, медиана $A'M$ проходит через Q. Так как медиана BC является одновременно и высотой, то треугольник $AA'B$ равнобедренный. Следовательно, $\angle QAB = \angle QA'B$. CM — средняя линия в треугольнике $AA'B$, а значит, параллельна $A'C$. Следовательно, угол $QA'B$ равен углу QMC как накрест лежащий, ч. т. д.

2. Вписанная окружность равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ касается его боковых сторон BC и AB в точках E и F. Через точку A проведен внутри угла EAB луч, пересекающий вписанную окружность в точках P и Q. Прямые EP и EQ пересекают прямую AC в точках P' и Q'. Докажите, что $P'A = Q'C$.

См. решение задачи 3 младшей лиги.

3. Внутри тетраэдра $ABCD$ выбрана произвольная точка P. Обозначим радиус описанной сферы этого тетраэдра через R, а расстояние от точки P до центра этой сферы через x. Докажите неравенства

$$(R + x) \cdot (R - x)^3 \leqslant PA \cdot PB \cdot PC \cdot PD \leqslant (R + x)^3 \cdot (R - x).$$

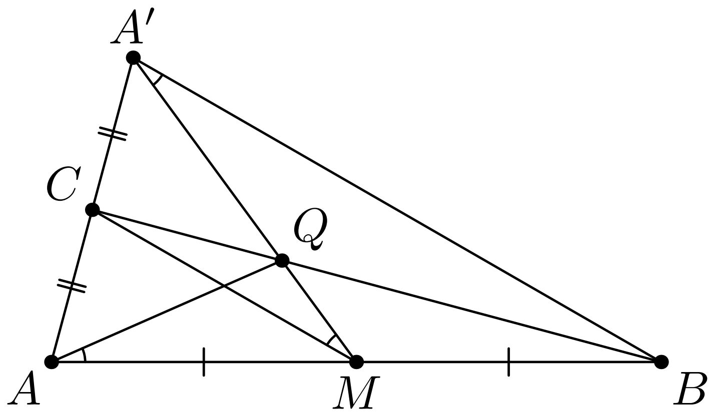

Рис. 4: К задаче 1

Решение. Пусть лучи PA, PB, PC, PD пересекают описанную сферу в точках A', B', C', D' соответственно. По теореме о степени точки имеем $PA\cdot PA' = PB\cdot PB' = PC\cdot PC' = PD\cdot PD' = R^2 - x^2$. Так что если, например, $PA' \leqslant PB$, то умножая это неравенство на PA и неравенства треугольника $R-x \leqslant PC$, $R-x \leqslant PD$ получаем левое неравенство. Аналогично установим правое неравенство, если $PA' \geqslant PB$.
Обозначим через α, β, γ, δ углы $\angle OPA$, $\angle OPB$, $\angle OPC$, $\angle OPD$ соответственно. Треугольники OPA', OPB имеют пары равных сторон x и R, причем $R > x$. Несложно видеть, что в этом случае, чем меньше угол, лежащий против стороны длины R, тем больше третья сторона треугольника. Значит, $PA' \leqslant PB$ если и только если $\pi - \alpha \geqslant \beta$. Резюмируя эти наблюдения получаем, что достаточно среди углов α, β, γ, δ найти два с суммой не меньше π и два с суммой не больше π.
Рассмотрим плоскость σ, проходящую через P перпендикулярно OP. Все точки A, B, C, D не могут лежать по одну сторону от нее. Если по каждую сторону лежат две точки, то требуемое очевидно. Пусть по одну сторону лежит только точка PA (например, по ту же, где точка O). Тогда угол α острый, β, γ, δ тупые. Достаточно доказать, что один из этих тупых углов не больше $\pi - \alpha$. Если это не так, то все точки B, C, D лежат в конусе с образующей PA' и осью, идущей по продолжению отрезка OP за точку P. Но тогда P не лежит внутри тетраэдра. Противоречие.

4. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Центр вневписанной окружности треугольника, касающейся стороны BC треугольника, обозначим через I_A, а точку ее касания с этой стороной — через A_1. Аналогично определим точки I_B, I_C, B_1, C_1. Докажите, что описанные окружности треугольников AI_AA_1, BI_BB_1 и CI_CC_1 имеют две общие точки.

Первое решение. Проведем описанную окружность треугольника ABC. Отметим центр I вписанной окружности $\triangle ABC$ и середину дуги BC описанной окружности $\triangle ABC$, не содержащей точку A, точку A'. Тогда по лемме о трезубце A' есть середина отрезка II_A. Значит, $IA\cdot II_A = 2IA\cdot IA'$. То есть степень точки I относительно описанной окружности $\triangle AA_1I_A$ в два раза больше степени точки I относительно описанной окружности $\triangle ABC$. Аналогичное можно сказать и про другие окружности из условия. Значит, I имеет одинаковую степень относительно всех трех окружностей. Проведем внешнюю биссектрису угла A до пересечения со стороной BC в точке L_A. Аналогично определим точки L_B и L_C. См. рис. 5. Отметим, что точки L_A, L_B, L_C лежат на одной прямой. Так как AI_A — биссектриса угла A, то угол L_AAI_A прямой. Следовательно, точки L_A, I_A, A_1 и A лежат на одной окружности с диаметром L_AI_A. Аналогичное верно и для других окружностей. Значит, центры рассматриваемых окружностей суть середины отрезков I_AL_A, I_BL_B, I_CL_C. Но они лежат на прямой Гаусса четырехсторонника, образованного внешними биссектрисами треугольника ABC и прямой, проходящей через основания внешних биссектрис. А раз центры лежат на одной прямой, то либо окружности не имеют радикального центра, либо у них общая радикальная ось. Но, так как есть точка, имеющая одинаковую степень относительно всех трех окружностей и лежащая внутри каждой из этих окружностей (на хордах AI_A, BI_B, CI_C), то окружности имеют общую радикальную ось и все ее пересекают. Следовательно, имеют две общие точки, ч. т. д. *Второе решение.* Воспользуемся доказательством того, что рассматриваемые окружности суть окружности с диаметрами L_AI_A, L_BI_B, L_CI_C. Тогда эти окружности имеют общие точки просто по теореме Плюккера. Другими словами, все эти окружности имеют общую радикальную ось — прямую Обера соответственного четырехсторонника. Значит, имеют две общие точки.

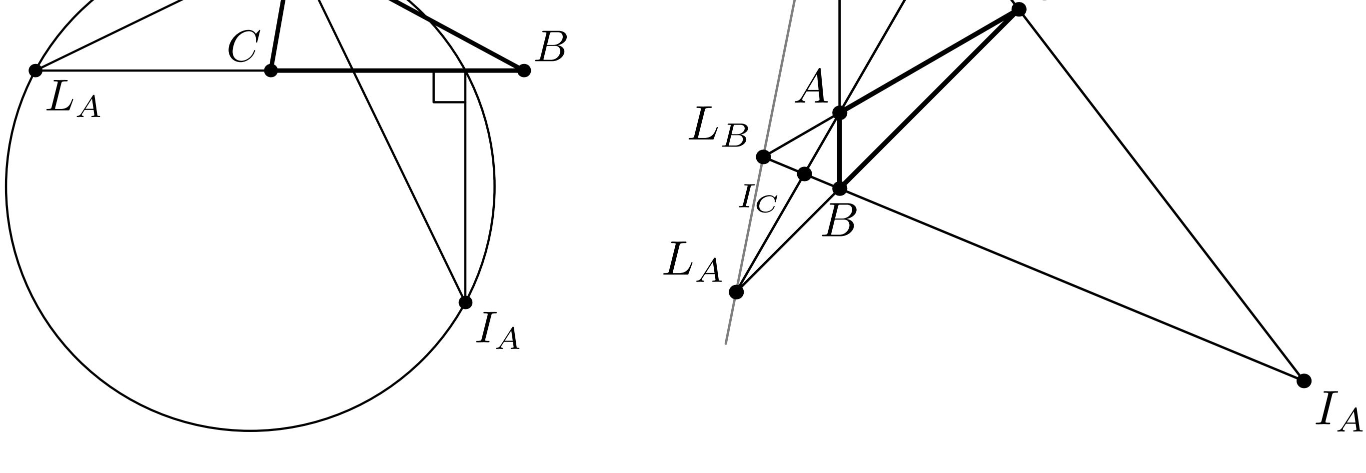

Рис. 5: К задаче 4