Алгебра и теория чисел

Младшая лига

1. Найдите наименьшее натуральное число, дающее попарно различные остатки при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

2. Последовательность $\{a_n\}$ определена рекуррентно: $a_1 = \frac{1}{2}$ и $a_n = \frac{a_{n-1}}{2n \cdot a_{n-1}+1}$ для $n > 1$. Найдите сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2012}$.

3. Вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что

$$a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \geqslant m + (m+1) + \ldots + n$$

при всех натуральных $m \leqslant n$. Докажите, что $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

4. Найдите все такие пары натуральных чисел (a, b), что a^2 делится на b, b^2 делится на a и $(b+1)^2$ делится на $a+1$.

Старшая лига

5. Функция $f(x)$, определенная при всех вещественных x, удовлетворяет равенствам $f(x) = f(x+T_1)$ при всех $x > A_1$ и $f(x) = f(x+T_2)$ при всех $x > A_2$, где T_1, T_2 — данные положительные числа, A_1, A_2 — данные вещественные числа. Докажите, что $f(x) = f(x+T_2)$ при всех $x > A_1$.

6. Натуральное число $k > 2$ и вещественные числа a, b таковы, что многочлен $x^k + ax + 1$ делится на многочлен $x^2 + bx + 1$. Докажите, что $a(a-b) = 0$.

7. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что если число x_n — простое, то n — либо степень числа 2, либо простое.

8. Найдите наименьшее положительное C такое, что неравенство

$$\frac{x}{\sqrt{yz}} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{y}{\sqrt{zx}} \cdot \frac{1}{y+1} + \frac{z}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{z+1} \leqslant C$$

выполнено для любых положительных чисел x, y, z, удовлетворяющих равенству

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1.$$

Геометрия

Младшая лига

9. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в ее середине M. Так же известно, что $\angle BDC = 90^\circ$. Найдите углы параллелограмма $ABCD$.

10. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали перпендикулярны. Точки K и L на боковых сторонах AB и CD соответственно таковы, что отрезок KL проходит через точку пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ и параллелен ее основаниям. На боковой стороне AB отмечена точка M такая, что $AM = BK$. Докажите, что $LM = AB$.

11. Вписанная окружность равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ касается его боковых сторон BC и AB в точках E и F. Через точку A проведен внутри угла EAB луч, пересекающий вписанную окружность в точках P и Q. Прямые EP и EQ пересекают прямую AC в точках P' и Q'. Докажите, что $P'A = Q'C$.

12. Верно ли, что любой треугольник площади 3 можно покрыть выпуклым многоугольником площади 5, имеющим ось симметрии?

Старшая лига

13. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На гипотенузе AB отмечена ее середина M. На стороне CB выбрана точка Q такая, что $\dfrac{BQ}{QC} = 2$. Докажите, что $\angle QAB = \angle QMC$.

14. Вписанная окружность равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ касается его боковых сторон BC и AB в точках E и F. Через точку A проведен внутри угла EAB луч, пересекающий вписанную окружность в точках P и Q. Прямые EP и EQ пересекают прямую AC в точках P' и Q'. Докажите, что $P'A = Q'C$.

15. Внутри тетраэдра $ABCD$ выбрана произвольная точка P. Обозначим радиус описанной сферы этого тетраэдра через R, а расстояние от точки P до центра этой сферы через x. Докажите неравенства

$$(R + x) \cdot (R - x)^3 \leqslant PA \cdot PB \cdot PC \cdot PD \leqslant (R + x)^3 \cdot (R - x).$$

16. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Центр вневписанной окружности треугольника, касающейся стороны BC треугольника, обозначим через I_A, а точку ее касания с этой стороной — через A_1. Аналогично определим точки I_B, I_C, B_1, C_1. Докажите, что описанные окружности треугольников AI_AA_1, BI_BB_1 и CI_CC_1 имеют две общие точки.

Комбинаторика и логика

Младшая лига

17. За круглым столом сидели четыре студента. Филолог сидел против Лу́зина, рядом с историком. Математик сидел рядом с Лебедевым. Соседи Лихачёва — Соловьёв и физик. Какая профессия у Лузина?

18. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2012$. Петя стирает их по одному. Докажите, что он может делать это в таком порядке, чтобы сумма нестертых чисел всегда была составным числом.

19. Дан произвольный треугольник. На каждой стороне треугольника отмечено 10 точек. Каждая вершина треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками противолежащей стороны. На какое наибольшее число частей отрезки могли разделить треугольник?

20. Паули и Бор играют в следующую игру. Имеется куча из $99!$ молекул. За один ход из кучи разрешается взять не более, чем 1% от оставшихся молекул. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Ходят поочередно, начинает Паули. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

21. Секретный объект представляет собой в плане квадрат 40×40 м, разбитый коридорами на квадратики 5×5 м. В каждой вершине такого квадратика — выключатель. Щелчок выключателя действует сразу на все выходящие из этой вершины пятиметровые коридоры, меняя их освещенности на противоположные. Сторож находится в углу полностью неосвещенного объекта. Он может ходить только по освещенным коридорам и щелкать выключателями любое число раз. Может ли он добиться того, чтобы от любого выключателя к любому другому он мог пройти, не щелкая выключателями?

Старшая лига

22. 77 жителей острова лжецов и рыцарей стали в круг. Всем известно, что их веса различны. На вопрос «У тебя есть сосед-лжец легче тебя?» все ответили «Да». После перерыва они стали в круг в другом порядке. Докажите, что на вопрос «У тебя есть сосед-рыцарь легче тебя?» как минимум двое ответят «Да».

23. По кругу стоит 101 блюдце, на каждом по конфете. Сначала Малыш выбирает натуральное $m < 101$ и сообщает его Карлсону, затем Карлсон — натуральное $k < 101$. Малыш берет конфету с любого блюдца. Отсчитав от этого блюдца k-е блюдце по часовой стрелке, Карлсон берет с него конфету. Отсчитав уже от этого блюдца m-е блюдце по часовой стрелке, Малыш берет с него конфету (если она там еще есть). Отсчитав от блюдца Малыша k-е блюдце по часовой стрелке, Карлсон берет с него конфету (если она там еще есть), и т. д. Какое наибольшее число конфет может гарантировать себе Карлсон?

24. От таблицы результатов однокругового футбольного турнира 10 команд осталось только суммарное количество забитых и пропущенных мячей для каждой команды. Математику этого хватило, чтобы восстановить счёт в каждом матче. Какое наименьшее количество из этих 20 чисел могло быть нулями?

25. В вершинах выпуклого многогранника с n вершинами записано по два положительных числа: синее и красное, причем сумма синих равна сумме красных. За один ход можно изменить два синих числа в концах любого одного ребра так, чтобы чтобы они остались положительными и сумма сохранилась. Докажите, что не более чем за $n-1$ ход можно добиться, чтобы в каждой вершине синее число стало равно красному.

26. Даны натуральные числа r и n, $r \leqslant n$. Рассматриваются всевозможные упорядоченные наборы $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ неотрицательных целых чисел, такие, что $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = r$, $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$. Для каждого набора вычислена дробь $\frac{1}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$ (напомним, что $0! = 1$). Докажите, что сумма этих дробей равна $\frac{(n-1)!}{(n-r)!r!(r-1)!}$.

Командная олимпиада

Младшая лига

27. (2) Три жулика, каждый с двумя чемоданами, хотят переправиться через реку. Есть трехместная лодка, каждое место в которой может быть занято человеком или чемоданом. Никто из жуликов не доверит свой чемодан спутникам в свое отсутствие, но готов оставить чемоданы на безлюдном берегу. Смогут ли они переправиться? (Лодку, приставшую к берегу, считаем частью берега.)

28. (2) У Саши есть 5 кульков с конфетами. Выбирая всевозможными способами пару кульков и подсчитывая суммарное число конфет в них, Саша заметил, что суммы принимают только три значения: 53, 66 и 79. Сколько конфет в каждом кульке?

29. (3) Бумажный треугольник со сторонами a, b, c перегнули по прямой так, что вершина, противолежащая стороне длины c, попала на эту сторону. Известно, что в получившемся четырехугольнике равны два угла, примыкающие к линии сгиба. Найдите длины отрезков, на которые делит сторону c попавшая туда вершина.

30. (5) Из клетчатой доски 20×12 вырезали центральный квадрат 2×2. Можно ли оставшуюся часть разрезать на фигурки в виде буквы Г (состоящие из четырех квадратиков)? Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать.

31. (5) Пусть x и y — неотрицательные числа, сумма которых не превосходит 1. Докажите, что $x^2 + 8x^2y^2 + y^2 \leqslant 1$.

32. (5) Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На стороне AB выбирается точка K, а на стороне BC — точка L так, что $AK + CL = \frac{1}{2}AB$. Найдите геометрическое место середин отрезков KL.

33. (6) В ряд записаны несколько различных натуральных чисел. Назовем пару рядом стоящих чисел *плохой*, если их сумма кратна 7 и левое больше правого, либо их сумма не кратна 7 и левое меньше правого. Каждую минуту числа какой-нибудь из плохих пар меняются местами. Докажите, что рано или поздно такие перестановки прекратятся.

34. (9) В ряд стоит 1111 блюдец, на них лежат 1, 2, 3, …, 555, 556, 555, 554, …, 2, 1 орехов. За ход разрешается переложить любое число (не меньше одного) орехов с любого блюдца на соседнее слева или съесть любое число орехов из самого левого блюдца. Петя и Вася делают ходы по очереди, начинает Петя. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто из них может выиграть, как бы не играл соперник?

35. (11) Пусть P — произведение некоторых восьми последовательных натуральных чисел, а Q — наименьший точный квадрат, для которого $Q > P$. Докажите, что разность $Q - P$ является точным квадратом.

36. (12) В правильном семиугольнике $ABCDEFG$ стороны равны 1. Диагонали AD и CG пересекаются в точке H. Докажите, что $FH = \sqrt{2}$.

Старшая лига

37. (3) На доске написано несколько различных чисел, причем известно, что среди любых трех чисел, написанных на доске, есть два числа, сумма которых также написана на доске. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

38. (4) Найдите все функции $f\colon [-2;2] \to \mathbb{R}$ такие, что для любых вещественных x и y верно равенство $f(\sin x + \cos y) + f(\sin y + \cos x) = \sin(x + y)$.

39. (5) По кругу лежит 17 одинаковых на вид монет, из которых две лежащие рядом — фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, и обе фальшивые монеты весят одинаково и при этом легче настоящих на 1 грамм. Имеются *хлипкие* весы — это чашечные весы, которые ломаются, если разность весов на чашах больше 1 грамма, однако, показывают при этом, какая чаша перевесила. Как за два взвешивания на хлипких весах без гирь найти обе фальшивые монеты?

40. (5) Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из 2012 натуральных чисел, в разложении каждого из которых на простые множители четное число различных простых чисел?

41. (6) Узлом назовем точку, обе координаты которой — целые числа. Внутри треугольника ABC с вершинами в узлах распожено ровно $n > 0$ узлов. Какое наибольшее число узлов может находиться на стороне BC?

42. (6) В правильном семиугольнике $ABCDEFG$ стороны равны 1. Диагонали AD и CG пересекаются в точке H. Докажите, что $FH = \sqrt{2}$.

43. (7) В стране n аэропортов, некоторые из них связаны двусторонними беспосадочными авиалиниями. Сеть авиалиний связна: из любого аэропорта можно добраться до любого другого. Оказалось, что не менее чем k аэропортов — узловые: при закрытии любого из них связность сети авиалиний нарушается. При данных n и $k \leqslant n - 2$ определите наибольшее возможное число авиалиний в стране.

44. (7) Пусть γ_1 и γ_2 — две окружности, касающиеся в точке T. Через точку T проведены прямые a и b, которые пересекают окружность γ_1 вторично в точках A и B соответственно, а окружность γ_2 — в точках A_1 и B_1 соответственно. Пусть X — произвольная точка плоскости, не лежащая на данных прямых a, b и окружностях γ_1, γ_2. Окружности, описанные вокруг треугольников ATX и BTX, пересекают окружность γ_2 в точках A_2 и B_2 соответственно. Докажите, что прямые TX, A_1B_2 и A_2B_1 пересекаются в одной точке.

45. (8) Положительные числа a, b, c и d таковы, что $a + b + c + d = 1$. Докажите,

что
$$\frac{a^3}{(1+b)(1-c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1-d)}+\frac{c^3}{(1+d)(1-a)}+\frac{d^3}{(1+a)(1-b)}\geqslant\frac{1}{15}$$

46. (9) В ряд стоит 2012 блюдечек, пронумерованных от 1 до 2012. На k-ом блюде лежит ровно k орехов. Двое играют в игру. За ход разрешается переложить любое число (не меньше одного) орехов с m-го блюда на $(m-1)$-ое (где m выбирается от 2 до 2012 на усмотрение игрока), либо забрать с первого блюда любое число (тоже не меньше одного) орехов. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Регата

Младшая лига

Алгебра и теория чисел

47. Вещественные числа x и y таковы, что $x^2+xy+y^2=4$ и $x^4+x^2y^2+y^4=8$. Найдите $x^6+x^3y^3+y^6$.

48. Маша пишет в таблицу числа: в первой строчке она пишет число 1, во второй строчке она пишет числа 2 и 3 (2 оказывается под 1), в третьей строчке 4, 5, 6 (4 под 2) и т. д. до тех пор, пока она не напишет 2012. В каком столбце будет наибольшая сумма?

49. Вася расставил по кругу числа от 1 до 10 в произвольном порядке и посчитал все суммы трех подряд стоящих чисел. Какое наибольшее значение может принимать наименьшая из этих сумм?

50. Найдите все такие натуральные m, что $\{\sqrt{m}\}=\{\sqrt{m+2011}\}$.

Геометрия

51. На сторонах AB и BC треугольника ABC нашлись точки X и Y соответственно такие, что $\angle BYX=\angle AYC$ и $\dfrac{BY}{YC}=2\cdot\dfrac{BX}{XA}$. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

52. На боковой стороне AB прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AB\perp BC$) построена полуокружность (как на диаметре), которая касается боковой стороны CD в точке

K. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Найдите длину отрезка OK, если длины оснований трапеции $ABCD$ равны 2 и 3.

53. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD оказалось, что $AD = DC = CB < AB$. Точки E и F на сторонах CD и BC соответственно таковы, что $\angle ADE = \angle AEF$. Докажите, что $4CF \leqslant BC$.

54. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AB = AC$ и $BC = CD$. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а точка X — середина дуги CD, не содержащей точку A. Докажите, что $XO \perp AB$.

Комбинаторика

55. Три грани куба $8 \times 8 \times 8$ покрашены в синий цвет, а три другие грани — в красный цвет так, что ни в какой вершине не сходятся три грани одного цвета. Сколько кубиков из этого большого куба имеют как синюю, так и красную грань?

56. Олимпиада по математике проводится в два дня, каждый день предлагается одинаковое число задач, пронумерованных от 1 до N. Оказалось, что у каждого школьника количества решенных им задач в первый и второй день отличаются на 1. При этом для каждого номера от 1 до N число школьников, решивших задачи с этим номером в разные дни, отличается на 2. Докажите, что в олимпиаде участвовало четное число школьников.

57. В футбольном турнире принимали участие 30 команд. По окончании турнира оказалось, что среди любых трех команд найдутся две, которые в трех матчах внутри этой тройки команд набрали поровну очков (за победу дается 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0). Какое минимальное количество ничьих может быть в таком турнире?

58. Имеется множество из 2012 чисел, не все из которых целые. Какое наибольшее количество подмножеств этого множества могут иметь целую сумму (пустое множество не учитывается).

Старшая лига

Алгебра и теория чисел

59. Решите в целых числах уравнение $x - y = x^2 + xy + y^2$.

60. Найдите наименьшее натуральное число, дающее попарно различные остатки при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

61. Функция $f(x)$ такова, что $f(1) = 0$, $f(2n) = f(n) + 1$ и $f(2n + 1) = f(2n) - 1$ при $n \in \mathbb{N}$. Найдите сумму $f(1) + f(2) + \ldots + f(127)$.

62. Последовательность $\{a_n\}$ определена рекуррентно: $a_1 = \dfrac{1}{2}$ и $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2n \cdot a_{n-1} + 1}$ для $n > 1$. Найдите сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2012}$.

Геометрия

63. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки K, L и M. Оказалось, что радиусы описанных окружностей треугольников AKM, BKL, CLM и KLM равны. Докажите, что треугольники ABC и KLM подобны.

64. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка X и через нее проведены отрезки PQ и EF, параллельные сторонам квадрата AD и AB соответственно, с концами, лежащими на сторонах квадрата (P на AB, F на AD). Оказалось, что $S_{ECQX} = 2S_{PXFA}$. Чему равен $\angle EAQ$?

65. В тетраэдре $SABC$ радиусы описанных окружностей граней SAB, SBC и SAC равны 108. Радиус вписанной сферы этого тетраэдра равен 35, а расстояние от вершины S до ее центра равно 125. Чему равен радиус описанной сферы этого тетраэдра?

66. Точки K, L, M и N лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$. Оказалось, что $\angle KLA = \angle LAM = \angle AMN = 45°$. Докажите, что $KL^2 + AM^2 = LA^2 + MN^2$.

Комбинаторика

67. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске, чтобы белые не били никого (ни белых, ни черных) по вертикали, а черные — по горизонтали?

68. Имеется 2012 палочек с длинами от 1 до 2012. Будем называть тройку палочек *хорошей*, если из них можно составить треугольник и *плохой* в противном случае. Каких троек больше — хороших или плохих?

69. На некоторых полях доски 100×100 стоят столбики из шашек. За один ход разрешается переставить любой столбик на столько клеток по вертикали или горизонтали, сколько в нем шашек; если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Вначале на каждой клетке стоит по одной шашке. Можно ли за 9999 ходов собрать их все на одной клетке?

70. Сколькими способами куб $n \times n \times n$ можно разрезать на бруски $1 \times 1 \times n$?