Личная письменная олимпиада «Алгебра и теория чисел»

Младшая лига

1. Найдите наименьшее натуральное число, дающее попарно различные остатки при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

2. Последовательность $\{a_n\}$ определена рекуррентно: $a_1 = \frac{1}{2}$ и $a_n = \frac{a_{n-1}}{2n \cdot a_{n-1}+1}$ для $n > 1$. Найдите сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2012}$.

3. Вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что

$$a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \geqslant m + (m+1) + \ldots + n$$

при всех натуральных $m \leqslant n$. Докажите, что $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

4. Найдите все такие пары натуральных чисел (a, b), что a^2 делится на b, b^2 делится на a и $(b+1)^2$ делится на $a+1$.

Старшая лига

1. Функция $f(x)$, определенная при всех вещественных x, удовлетворяет равенствам $f(x) = f(x+T_1)$ при всех $x > A_1$ и $f(x) = f(x+T_2)$ при всех $x > A_2$, где T_1, T_2 — данные положительные числа, A_1, A_2 — данные вещественные числа. Докажите, что $f(x) = f(x+T_2)$ при всех $x > A_1$.

2. Натуральное число $k > 2$ и вещественные числа a, b таковы, что многочлен $x^k + ax + 1$ делится на многочлен $x^2 + bx + 1$. Докажите, что $a(a-b) = 0$.

3. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что если число x_n — простое, то n — либо степень числа 2, либо простое.

4. Найдите наименьшее положительное C такое, что неравенство

$$\frac{x}{\sqrt{yz}} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{y}{\sqrt{zx}} \cdot \frac{1}{y+1} + \frac{z}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{z+1} \leqslant C$$

выполнено для любых положительных чисел x, y, z, удовлетворяющих равенству

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1.$$