Командная устная олимпиада

Младшая лига

1. (2) Три жулика, каждый с двумя чемоданами, хотят переправиться через реку. Есть трехместная лодка, каждое место в которой может быть занято человеком или чемоданом. Никто из жуликов не доверит свой чемодан спутникам в свое отсутствие, но готов оставить чемоданы на безлюдном берегу. Смогут ли они переправиться? (Лодку, приставшую к берегу, считаем частью берега.)

2. (2) У Саши есть 5 кульков с конфетами. Выбирая всевозможными способами пару кульков и подсчитывая суммарное число конфет в них, Саша заметил, что суммы принимают только три значения: 53, 66 и 79. Сколько конфет в каждом кульке?

3. (3) Бумажный треугольник со сторонами a, b, c перегнули по прямой так, что вершина, противолежащая стороне длины c, попала на эту сторону. Известно, что в получившемся четырехугольнике равны два угла, примыкающие к линии сгиба. Найдите длины отрезков, на которые делит сторону c попавшая туда вершина.

4. (5) Из клетчатой доски 20×12 вырезали центральный квадрат 2×2. Можно ли оставшуюся часть разрезать на фигурки в виде буквы Г (состоящие из четырех квадратиков)? Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать.

5. (5) Пусть x и y — неотрицательные числа, сумма которых не превосходит 1. Докажите, что $x^2 + 8x^2y^2 + y^2 \leqslant 1$.

6. (5) Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На стороне AB выбирается точка K, а на стороне BC — точка L так, что $AK + CL = \frac{1}{2}AB$. Найдите геометрическое место середин отрезков KL.

7. (6) В ряд записаны несколько различных натуральных чисел. Назовем пару рядом стоящих чисел *плохой*, если их сумма кратна 7 и левое больше правого, либо их сумма не кратна 7 и левое меньше правого. Каждую минуту числа какой-нибудь из плохих пар меняются местами. Докажите, что рано или поздно такие перестановки прекратятся.

8. (9) В ряд стоит 1111 блюдец, на них лежат $1, 2, 3, \ldots, 555, 556, 555, 554, \ldots, 2, 1$ орехов. За ход разрешается переложить любое число (не меньше одного) орехов с любого блюдца на соседнее слева или съесть любое число орехов из самого левого блюдца. Петя и Вася делают ходы по очереди, начинает Петя. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто из них может выиграть, как бы не играл соперник?

9. (11) Пусть P — произведение некоторых восьми последовательных натуральных чисел, а Q — наименьший точный квадрат, для которого $Q > P$. Докажите, что разность $Q - P$ является точным квадратом.

10. (12) В правильном семиугольнике $ABCDEFG$ стороны равны 1. Диагонали AD и CG пересекаются в точке H. Докажите, что $FH = \sqrt{2}$.

Старшая лига

1. (3) На доске написано несколько различных чисел, причем известно, что среди любых трех чисел, написанных на доске, есть два числа, сумма которых также написана на доске. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

2. (4) Найдите все функции $f\colon [-2;2] \to \mathbb{R}$ такие, что для любых вещественных x и y верно равенство $f(\sin x + \cos y) + f(\sin y + \cos x) = \sin(x + y)$.

3. (5) По кругу лежит 17 одинаковых на вид монет, из которых две лежащие рядом — фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, и обе фальшивые монеты весят одинаково и при этом легче настоящих на 1 грамм. Имеются *хлипкие* весы — это чашечные весы, которые ломаются, если разность весов на чашах больше 1 грамма, однако, показывают при этом, какая чаша перевесила. Как за два взвешивания на хлипких весах без гирь найти обе фальшивые монеты?

4. (5) Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из 2012 натуральных чисел, в разложении каждого из которых на простые множители четное число различных простых чисел?

5. (6) Узлом назовем точку, обе координаты которой — целые числа. Внутри треугольника ABC с вершинами в узлах распожено ровно $n > 0$ узлов. Какое наибольшее число узлов может находиться на стороне BC?

6. (6) В правильном семиугольнике $ABCDEFG$ стороны равны 1. Диагонали AD и CG пересекаются в точке H. Докажите, что $FH = \sqrt{2}$.

7. (7) В стране n аэропортов, некоторые из них связаны двусторонними беспосадочными авиалиниями. Сеть авиалиний связна: из любого аэропорта можно добраться до любого другого. Оказалось, что не менее чем k аэропортов — узловые: при закрытии любого из них связность сети авиалиний нарушается. При данных n и $k \leqslant n - 2$ определите наибольшее возможное число авиалиний в стране.

8. (7) Пусть γ_1 и γ_2 — две окружности, касающиеся в точке T. Через точку T проведены прямые a и b, которые пересекают окружность γ_1 вторично в точках A и B

соответственно, а окружность γ_2 — в точках A_1 и B_1 соответственно. Пусть X — произвольная точка плоскости, не лежащая на данных прямых a, b и окружностях γ_1, γ_2. Окружности, описанные вокруг треугольников ATX и BTX, пересекают окружность γ_2 в точках A_2 и B_2 соответственно. Докажите, что прямые TX, A_1B_2 и A_2B_1 пересекаются в одной точке.

9. (8) Положительные числа a, b, c и d таковы, что $a+b+c+d=1$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{(1+b)(1-c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1-d)}+\frac{c^3}{(1+d)(1-a)}+\frac{d^3}{(1+a)(1-b)} \geqslant \frac{1}{15}$$

10. (9) В ряд стоит 2012 блюдечек, пронумерованных от 1 до 2012. На k-ом блюде лежит ровно k орехов. Двое играют в игру. За ход разрешается переложить любое число (не меньше одного) орехов с m-го блюда на $(m-1)$-ое (где m выбирается от 2 до 2012 на усмотрение игрока), либо забрать с первого блюда любое число (тоже не меньше одного) орехов. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?