Личная устная олимпиада «Комбинаторика и логика»

Младшая лига

1. За круглым столом сидели четыре студента. Филолог сидел против Лу́зина, рядом с историком. Математик сидел рядом с Лебедевым. Соседи Лихачёва — Соловьёв и физик. Какая профессия у Лузина?

2. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2012$. Петя стирает их по одному. Докажите, что он может делать это в таком порядке, чтобы сумма нестертых чисел всегда была составным числом.

3. Дан произвольный треугольник. На каждой стороне треугольника отмечено 10 точек. Каждая вершина треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками противолежащей стороны. На какое наибольшее число частей отрезки могли разделить треугольник?

4. Паули и Бор играют в следующую игру. Имеется куча из $99!$ молекул. За один ход из кучи разрешается взять не более, чем 1% от оставшихся молекул. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Ходят поочередно, начинает Паули. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

5. Секретный объект представляет собой в плане квадрат 40×40 м, разбитый коридорами на квадратики 5×5 м. В каждой вершине такого квадратика — выключатель. Щелчок выключателя действует сразу на все выходящие из этой вершины пятиметровые коридоры, меняя их освещенности на противоположные. Сторож находится в углу полностью неосвещенного объекта. Он может ходить только по освещенным коридорам и щелкать выключателями любое число раз. Может ли он добиться того, чтобы от любого выключателя к любому другому он мог пройти, не щелкая выключателями?

Старшая лига

1. 77 жителей острова лжецов и рыцарей стали в круг. Всем известно, что их веса различны. На вопрос «У тебя есть сосед-лжец легче тебя?» все ответили «Да». После перерыва они стали в круг в другом порядке. Докажите, что на вопрос «У тебя есть сосед-рыцарь легче тебя?» как минимум двое ответят «Да».

2. По кругу стоит 101 блюдце, на каждом по конфете. Сначала Малыш выбирает натуральное $m < 101$ и сообщает его Карлсону, затем Карлсон — натуральное $k < 101$. Малыш берет конфету с любого блюдца. Отсчитав от этого блюдца k-е блюдце по часовой стрелке, Карлсон берет с него конфету. Отсчитав уже от этого блюдца m-е блюдце по часовой стрелке, Малыш берет с него конфету (если она там еще есть). Отсчитав от блюдца Малыша k-е блюдце по часовой стрелке, Карлсон берет с него конфету (если она там еще есть), и т. д. Какое наибольшее число конфет может гарантировать себе Карлсон?

3. От таблицы результатов однокругового футбольного турнира 10 команд осталось только суммарное количество забитых и пропущенных мячей для каждой команды. Математику этого хватило, чтобы восстановить счёт в каждом матче. Какое наименьшее количество из этих 20 чисел могло быть нулями?

4. В вершинах выпуклого многогранника с n вершинами записано по два положительных числа: синее и красное, причем сумма синих равна сумме красных. За один ход можно изменить два синих числа в концах любого одного ребра так, чтобы чтобы они остались положительными и сумма сохранилась. Докажите, что не более чем за $n-1$ ход можно добиться, чтобы в каждой вершине синее число стало равно красному.

5. Даны натуральные числа r и n, $r \leqslant n$. Рассматриваются всевозможные упорядоченные наборы $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ неотрицательных целых чисел, такие, что $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = r$, $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$. Для каждого набора вычислена дробь $\frac{1}{k_1! k_2! \ldots k_n!}$ (напомним, что $0! = 1$). Докажите, что сумма этих дробей равна $\frac{(n-1)!}{(n-r)! r! (r-1)!}$.