Командная устная олимпиада (с решениями)

Младшая лига

1. (2) Три жулика, каждый с двумя чемоданами, хотят переправиться через реку. Есть трехместная лодка, каждое место в которой может быть занято человеком или чемоданом. Никто из жуликов не доверит свой чемодан спутникам в свое отсутствие, но готов оставить чемоданы на безлюдном берегу. Смогут ли они переправиться? (Лодку, приставшую к берегу, считаем частью берега.)

Ответ: смогут. *Решение.* Обозначим жуликов буквами A, B, C. Сначала C перевозит свои чемоданы, затем он (без багажа) возвращается обратно и перевозит A и B (без багажа). После этого A и B возвращаются, и A перевозит свои чемоданы. Наконец A и C возвращаются и перевозят B, который возвращается один за своими чемоданами.

2. (2) У Саши есть 5 кульков с конфетами. Выбирая всевозможными способами пару кульков и подсчитывая суммарное число конфет в них, Саша заметил, что суммы принимают только три значения: 53, 66 и 79. Сколько конфет в каждом кульке?

Ответ: 20, 33, 33, 33, 46. *Решение.* Для каждого кулька выпишем число конфет в нем. Среди этих чисел есть одинаковые (иначе, добавляя одно к остальным, получили бы четыре разных суммы). Сумма двух одинаковых — число четное, то есть 66. Значит, все одинаковые числа равны 33. Теперь ясно, что все нечетные числа равны 33 (иначе вместе с 33 не получим 66), а каждое четное равно либо $53 - 33 = 20$, либо $79 - 33 = 46$, причем оба эти случая реализуются. Отсюда ответ.

3. (3) Бумажный треугольник со сторонами a, b, c перегнули по прямой так, что вершина, противолежащая стороне длины c, попала на эту сторону. Известно, что в получившемся четырехугольнике равны два угла, примыкающие к линии сгиба. Найдите длины отрезков, на которые делит сторону c попавшая туда вершина.

Ответ: $\dfrac{ac}{a+b}$, $\dfrac{bc}{a+b}$. *Решение.* Пусть KL — линия сгиба, C — упомянутая вершина, C' — ее положение после перегиба. Отрезок CC' составлен из высот равных треугольников KCL и $KC'L$. Углы CKL и CLK равны как смежные к равным углам четырехугольника, значит, треугольник KCL — равнобедренный. Поэтому CC' — биссектриса угла C, и делит сторону c на указанные в ответе отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

4. (5) Из клетчатой доски 20×12 вырезали центральный квадрат 2×2. Можно ли оставшуюся часть разрезать на фигурки в виде буквы Г (состоящие из четырех квадратиков)? Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать.

Ответ: нельзя. *Решение.* Раскрасим вертикали по очереди в черный и белый цвет. Тогда фигурка при любом положении накрывает нечетное число белых клеток: 3 или 1. Оставшуюся часть доски из 236 оставшихся клеток надо разрезать на 59 фигурок. В них войдет нечетное число белых клеток, тогда как осталось 128 белых клеток — число четное. Значит, разрезать нельзя.

5. (5) Пусть x и y — неотрицательные числа, сумма которых не превосходит 1. Докажите, что $x^2 + 8x^2y^2 + y^2 \leqslant 1$.

Решение. $1 \geqslant (x+y)^2 \geqslant 4xy$, поэтому $2xy \geqslant 2xy \cdot 4xy = 8x^2y^2$. Отсюда $x^2+8x^2y^2+y^2 \leqslant x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \leqslant 1$.

6. (5) Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На стороне AB выбирается точка K, а на стороне BC — точка L так, что $AK + CL = \frac{1}{2}AB$. Найдите геометрическое место середин отрезков KL.

Решение. Отметим на AB точку M, а на BC — точку N так, чтобы $AM = CN = \frac{1}{4}AB$. Отметим также точки M_1 и N_1 — середины AB и BC. На отрезке MN отметим точки M_2 и N_2 пересечения отрезков AN_1 и CM_1 с отрезком MN. Нетрудно убедиться, что $M_2M = N_2N = AB/4$. Покажем, что искомое ГМТ совпадает с отрезком M_2N_2. Ясно, что L и K лежат по разные стороны от прямой MN и $KM = LN$. Без ограничения общности считаем, что K лежит на отрезке BM. Проведем через K прямую параллельно BN до пересечения с MN в некоторой точке D. Стороны треугольников MKD и ABC параллельны, поэтому MKD — равнобедренный, $MK = KD$. Отрезки KD и NL равны и параллельны, значит, $KNLD$ — параллелограмм, и середина E отрезка KL лежит на DN; кроме того, $NE > N_2N$ и $ME > M_2M$, так как если K' точка симметричная L относительно N и L' точка симметричная K относительно M, то $NE = KK'/2 > M_1N_1/2 = NN_2$ и $ME = LL'/2 > M_1N_1/2 = MM_2$. Значит $E \in M_2N_2$. Обратно, пусть E — точка на M_2N_2, и, скажем, $EN_2 < EM_2$. Отложив на EM отрезок $ED = EN$, проведя через D прямую параллельно BN до пересечения с BM в точке K и отложив на луче NC отрезок $NL = DK$, получим нужные нам отрезок KL с серединой E (несложно проверить, что L будет лежать на BC).

7. (6) В ряд записаны несколько различных натуральных чисел. Назовем пару рядом стоящих чисел *плохой*, если их сумма кратна 7 и левое больше правого, либо их сумма не кратна 7 и левое меньше правого. Каждую минуту числа какой-нибудь из плохих пар меняются местами. Докажите, что рано или поздно такие перестановки прекратятся.

Решение. Будем по тому же правилу определять плохие пары и для несоседних чисел. При каждой перестановке общее число плохих пар уменьшается на 1, отрицательным оно стать не может, поэтому рано или поздно процесс закончится.

8. (9) В ряд стоит 1111 блюдец, на них лежат 1, 2, 3, …, 555, 556, 555, 554, …, 2, 1 орехов. За ход разрешается переложить любое число (не меньше одного) орехов с любого блюдца на соседнее слева или съесть любое число орехов из самого левого блюдца. Петя и Вася делают ходы по очереди, начинает Петя. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто из них может выиграть, как бы не играл соперник?

Ответ: выигрывает Вася. *Решение.* Отметим блюдца с нечетным числом орехов (они идут через одно). Разобьем их на пары с одинаковым числом орехов. Пусть Вася все ходы делает только из отмеченных блюдец. Каждым ходом Петя нарушает равенство для какой-то пары отмеченных блюдец. Пусть Вася равенство восстанавливает: если Петя добавил орехи в блюдце пары, Вася их убирает; а если Вася убрал какое-то число орехов с одного блюдца пары, Вася убирает столько же из другого. В результате Вася всегда может сделать ход, поэтому он не проиграет, а так как игра конечна, то выиграет.

9. (11) Пусть P — произведение некоторых восьми последовательных натуральных чисел, а Q — наименьший точный квадрат, для которого $Q > P$. Докажите, что разность $Q - P$ является точным квадратом.

Решение. Заметим, что $(a^2-t^2)(b^2-t^2) = a^2b^2-(a^2+b^2)t^2+t^4 = (a^2b^2-2abt^2+t^4)-(a^2-2ab+b^2)t^2 = (ab-t^2)^2-(a-b)^2t^2$. Пусть $a-b = c-d = t$. Тогда $(a-2)(b-2)(c-2)(d-2)(a+2)(b+2)(c+2)(d+2) = (a^2-4)(b^2-4)(c^2-4)(d^2-4) = \big((ab-4)^2-4t^2\big)\big((cd-4)^2-4t^2\big) = \big((ab-4)(cd-4)-4t^2\big)^2-4(ab-cd)^2t^2$. Взяв $a = n+2$, $b = n$, $c = n+1$, $d = n-1$, получим $t = 2$, $ab = n^2+2n$, $cd = n^2-1$, и $(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = \big((n^2+2n-4)(n^2-5)-16\big)^2-16(2n+1)^2$. При $n \leqslant 7$ число $((n^2+2n-4)(n^2-5)-16)^2$ — ближайший квадрат к произведению P_n чисел от $n-3$ до $n+4$. Действительно, при уменьшении числа $(n^2+2n-4)(n^2-5)-16$ на единицу его квадрат уменьшится на число порядка $2n^4$, что больше числа $16(2n+1)^2$. Для $n = 6$ эта формула «не точна»: она дает $P_6 = 1348^2-52^2$, но здесь первый квадрат можно уменьшить: $1348^2-52^2 = 1347^2-3^2$. Соответственно, $P_5 = 604^2-44^2 = 603^2-27^2$, $P_4 = 204^2-36^2 = 201^2-9^2$. *Замечание.* Мы использовали частный случай более общей формулы $(a^2-c^2)(b^2-d^2) = (ab-cd)^2-(ad-bc)^2$.

10. (12) В правильном семиугольнике $ABCDEFG$ стороны равны 1. Диагонали AD и CG пересекаются в точке H. Докажите, что $FH = \sqrt{2}$.

Первое решение. См. рис. 1. Обозначим угол $x = \pi/7$. Заметим, что $ABCD$ и $ABCG$ — равнобокие трапеции, так что $ABCH$ — параллелограмм, а следовательно и ромб. Таким образом, $AH = HC = 1$. Пусть лучи GA, CB пересекаются в точке M. Считая вписанные углы в семиугольнике получаем, что $\angle AMC = 3x$, $\angle ACM = x$, так что треугольник ACM равнобедренный, $AC = CM$. Далее, треугольники HCM, HAF равны по двум сторонам и углу $2x$ между ними, так что $HF = HM$ и $\angle FHM = \angle FHA + \angle AHM = \angle CHM + \angle AHM = 5x$, так что можно построить правильный семиугольник $FHMLKJI$. Пусть отрезки MJ, HK пересекаются в точке N. Тогда $NM = HM$ (это равенство аналогично $AH = GA$, но в новом семиугольнике), $GM = CM$ из симметрии, $\angle NMG = \angle NMH - \angle GMH = \angle GMC - \angle GMH = \angle HMC$. Значит, треугольники NGM, HCM равны по двум сторонам и углу между ними, так что $NG = HC = 1$ и $\angle NGM = \angle HCM = 2x = \pi - \angle FGA$. Таким образом, G есть середина FN и $FN = 2$. Отношения $1 : FH$ и $FH : 2$ оказываются соответственными отношениями в двух наших правильных семиугольниках, так что они равны, что и требовалось доказать.

Второе решение. Как и в первом решении, начнем с наблюдения, что $ABCH$ — параллелограмм, пусть U — общая середина его диагоналей, V — середина BF. Тогда $FH = 2UV$ по теореме о средней линии треугольника BHF. Нам понадобится такой общий факт: если X_1, X_2, X_3, X_4 любые 4 точки плоскости, M_{ij} — середины соответствующих отрезков X_iX_j, то

$$4M_{13}M_{24}^2 = X_1X_2^2 + X_2X_3^2 + X_3X_4^2 + X_4X_1^2 - X_1X_3^2 - X_2X_4^2.$$

Установить его можно, например, рассмотрев параллелограммы Вариньона $M_{ij}M_{jk}M_{kl}M_{li}$ для перестановок $(i, j, k, l) = (1, 2, 3, 4), (1, 3, 2, 4), (1, 2, 4, 3)$, написав для них равенства параллелограмма и вычтя из суммы двух третье. Или применяя декартовы координаты. Рассматривая четырехугольник $X_1X_2X_3X_4 = ABCF$ мы видим, что $X_3X_4 = X_4X_2$, $X_1X_3 = X_1X_4$, так что $4UV^2 = AB^2 + BC^2 = 2$, что и требовалось.

Старшая лига

1. (3) На доске написано несколько различных чисел, причем известно, что среди любых трех чисел, написанных на доске, есть два числа, сумма которых также написана на доске. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

Ответ: 7. *Решение.* Во-первых заметим, что можно добавить к числам 0, если его там нет, и условие сохранится. Во вторых, заметим, что можно отдельно изучать положительние числа, написанные на доске, и отдельно для них тоже условие выполняется. Рассмотрим только положительные числа. Пусть наибольшее из них число — это A. Пусть B — второе по величине положительное число. Рассмотрим тройку (A, B, x), где x любое другое имеющееся на доске положительное число. Ясно, что тогда на доске не может быть сумма $A + B$ и $A + x$ — они больше, чем A. Значит на доске есть число $B + x$, и, так как оно больше, чем B — это A. Значит любое другое положительное число на доске, кроме A и B — это $A - B$. Отсюда ясно, что положительных чисел на доске не больше трех. Аналогично доказывается, что отрицательных чисел на доске тоже не больше трех. Значит всего чисел на доске не более семи. Для семи существует пример: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

2. (4) Найдите все функции $f\colon [-2; 2] \to \mathbb{R}$ такие, что для любых вещественных x и y верно равенство $f(\sin x + \cos y) + f(\sin y + \cos x) = \sin(x + y)$.

Решение. Подставим $y = \pi/2 + x$, получим $f(0) + f(2\cos x) = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, откуда $f(t) = t^2/2 - (f(0) + 1)$ для любого $t \in [-2, 2]$. Подставляя $t = 0$ находим $f(0) = -1/2$, $f(t) = t^2/2 - 1/2$. Легко видеть, что такая функция подходит.

3. (5) По кругу лежит 17 одинаковых на вид монет, из которых две лежащие рядом — фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, и обе фальшивые монеты весят одинаково и при этом легче настоящих на 1 грамм. Имеются *хлипкие* весы — это чашечные весы, которые ломаются, если разность весов на чашах больше 1 грамма, однако, показывают при этом, какая чаша перевесила. Как за два взвешивания на хлипких весах без гирь найти обе фальшивые монеты?

Решение. Пронумеруем монеты от 1 до 17. Положим на одну чашу весов монеты 1, 2, 4, 6, 14, 16, а на вторую чашу весов монеты с номерами 3, 5, 7, 8, 10, 12. Если весы сломались, то мы нашли фальшивую пару. Если весы в равновесии, то фаль-

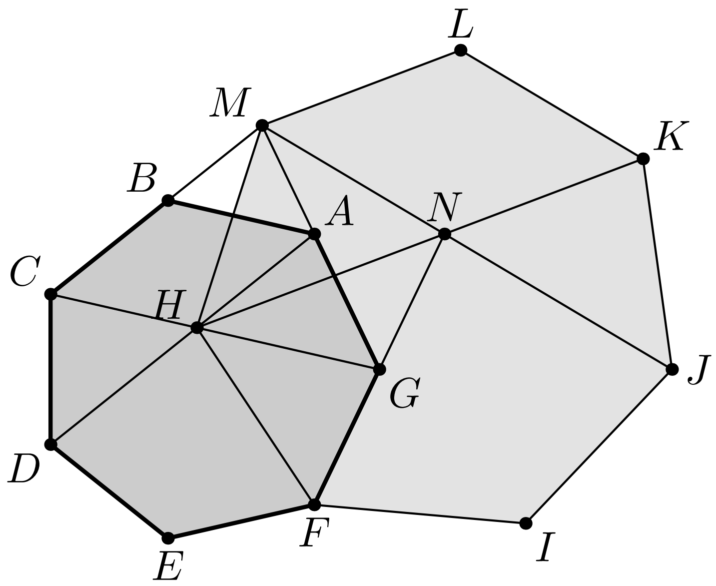

Рис. 1: К задаче 10

шивые монеты есть на обеих чашах по одной (так как, очевидно, наши взвешивания задели любую пару последовательных монет), и значит, пара фальшивых монет — это любая пара от $(2,3)$ до $(6,7)$. Если первая чаша легче второй, то на ней ровно одна фальшивая монета, и значит пара фальшивых монет — это пара от $(13,14)$ до $(17,1)$. Наконец, если легче вторая чаша, то пара фальшивых монет — это пара от $(8,9)$ до $(12,13)$. Таким образом, в любом случае, если мы еще не нашли фальшивую пару, то мы имеем задачу поиска фальшивой пары среди шести последовательных монет. Покажем, что это возможно. Пронумеруем заново монеты от 1 до 6. Взвесим на одной чаше монеты 1 и 2, а на второй — монеты 5 и 6. Если весы сломались, то мы нашли фальшивую пару. Если равенство, то фальшивые монеты — это $(3,4)$. Если легче первая чаша, то пара фальшивых монет — это $(2,3)$. Наконец, если легче вторая чаша, то фальшивая пара — это пара $(4,5)$.

4. (5) Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из 2012 натуральных чисел, в разложении каждого из которых на простые множители четное число различных простых чисел?

Ответ: да, существует. *Решение.* Выберем 2012 последовательных чисел $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $n+2012$ так, чтобы у каждого из них был простой делитель, не входящий в разложения остальных (например, построим такие числа по китайской теореме об остатках). Пусть эти простые числа — p_1, p_2, $\ldots$, p_{2012}. Кроме этого, расмотрим еще 2012 простых чисел q_1, q_2, $\ldots$, q_{2012}, которых нет в разложениях выбранных 2012 последовательных чисел. Теперь будем строить число A, на которое потом умножим все выбранные нами числа, чтобы получилась требуемая прогрессия. Заметим, что добавление в число A пары множителей $p_k q_k$ меняет четность количества простых множителей в точности только в числе $n+k$. Строя из таких множителей число A мы добьемся того, чтобы у всех чисел вида $A(n+k)$ было четное число простых множителей в разложении.

5. (6) Узлом назовем точку, обе координаты которой — целые числа. Внутри треугольника ABC с вершинами в узлах распожено ровно $n > 0$ узлов. Какое наибольшее число узлов может находиться на стороне BC?

Решение. Пусть на стороне BC находится m узлов. Тогда они делят сторону на $m+1$ равных отрезков (если бы отрезки были бы не равные, то узлов на стороне BC было бы больше чем m). Обозначим через $\overline{e} = \overline{BC}/(m+1)$, то есть $BC = (m+1) \cdot |\overline{e}|$. Рассмотрим среди узлов внутри треугольника узлы с наименьшим расстоянием до BC. Проведем через них прямую l параллельно BC. Пусть прямая l пересекает AB в точке B', а AC — в точке C'. Ближайший узел к B' среди расположенных внутри треугольника ABC и на прямой l обозначим через B_1, а ближайший узел к C' среди расположенных внутри треугольника ABC и на прямой l обозначим через C_1. Тогда $B'B_1 \leqslant |\overline{e}|$, $B_1C_1 \leqslant (n-1)\cdot|\overline{e}|$ (так как если мы отложим от B_1 вектор $(n-1)\overline{e}$, то мы получим на этом векторе уже n узлов, следовательно, точка C_1 должна лежать внутри или на конце этого вектора) и $C_1C' \leqslant \overline{e}$. Следовательно $B'C' \leqslant (n+1)\cdot|\overline{e}|$. С другой стороны, прямая l должна лежать между средней линией (может совпадать с ней) и стороной BC, так как если она лежит «выше средней линии», то можно отразить A относительно B_1 и получить узел, лежащий внутри треугольника ABC и находящийся ближе к BC. Следовательно $B'C' \geqslant BC/2 = (m+1)|\overline{e}|/2$. Совмещая полученные неравенства получаем $(m+1)\cdot|\overline{e}|/2 \leqslant B'C' \leqslant (n+1)\cdot|\overline{e}|$. Значит $m \leqslant 2n+1$. Пример для $2n+1$ следующий: $A(0;2)$; $B(0;0)$; $C(2n+2;0)$. На стороне BC ровно $2n+1$ узел, а внутри треугольника ровно n узлов.

6. (6) В правильном семиугольнике $ABCDEFG$ стороны равны 1. Диагонали AD и CG пересекаются в точке H. Докажите, что $FH = \sqrt{2}$.

См. решение задачи 10 младшей лиги.

7. (7) В стране n аэропортов, некоторые из них связаны двусторонними беспосадочными авиалиниями. Сеть авиалиний связна: из любого аэропорта можно добраться до любого другого. Оказалось, что не менее чем k аэропортов — узловые: при закрытии любого из них связность сети авиалиний нарушается. При данных n и $k \leqslant n-2$ определите наибольшее возможное число авиалиний в стране.

Ответ: $(n-k)(n-k-1)/2+k$. *Решение.* Пример: между аэропортами с номерами от 1 до $n-k$ есть все авиалинии, кроме того, есть авиалинии между аэропортами $(i, i+1)$ при $n-k \leqslant i \leqslant n-1$. Покажем, что больше авиалиний быть не может. Перейдем на язык графов, тогда узловые аэропорты — это точки сочленения. Нам понадобится понятие дерева блоков и точек сочленения графа. Напомним об этом.

Два ребра графа будем называть *похожими*, если они совпадают или входят в общий простой цикл (с разными вершинами). Ключевой момент состоит в том, что введенное нами отношение похожести есть отношение эквивалентности. Действительно, достаточно доказать транзитивность. Пусть ребра a, b входят в простой цикл Вася, ребра b, c входят в простой цикл Всеволод. Пойдем по Всеволоду от концов ребра c в две стороны, пока не наткнемся на Васю. Это произойдет не позже, чем мы подойдем к ребру b, так что на Васю мы наткнемся в разных вершинах x_1, x_2. Чтобы получить простой цикл, содержащий ребра a и c, достаточно взять те ребра Всеволода, по которым мы прошли (в том числе c), и добавить ту часть Васи от x_1 до x_2, в которой лежит ребро a. Класс эквивалентности ребер будем называть *блоком*. Легко видеть, что два блока (как графы) могут иметь не более одной общей вершины, и эта вершина есть точка сочленения. Рассмотрим новый граф, вершины которого суть блоки и точки сочленения, и ребро соответствует тому, что точка сочленения принадлежит блоку. Нетрудно видеть, что этот граф есть дерево, и его висячей вершиной может быть только блок. Он называется *крайним блоком* графа.

Перейдем к решению задачи. Индукция по n. Для $n = 2$ утверждение понятно. Так же оно ясно для $k = 0$. Пусть для меньших значений n оценка установлена и $k \geqslant 1$. Рассмотрим крайний блок, пусть он содержит $r+1$ вершину. Удалим его ребра (и все вершины, кроме точки сочленения) из графа, останется хотя бы $k-1$ точка сочленения. Поэтому, в частности, $k-1 \leqslant n-r-2$ (в связном графе с хотя бы двумя вершинами есть хотя бы две не точки сочленения), $n-r-k \geqslant 1$. Пользуясь индукционным предположением получаем, что количество ребер в графе не превосходит $r(r+1)/2 + (n-r-k+1)(n-r-k)/2 + k - 1$. Максимизируя это выражение по $r \in [1, n-k-1]$ получаем, что максимум достигается при $r = 1$ или $r = n-k+1$ (это квадратный трехчлен по r с положительным старшим коэффициентом, так что максимум априори достигается в одном из концов отрезка) и равен $(n-k)(n-k-1)/2 + k$, что и требовалось.

8. (7) Пусть γ_1 и γ_2 — две окружности, касающиеся в точке T. Через точку T проведены прямые a и b, которые пересекают окружность γ_1 вторично в точках A и B соответственно, а окружность γ_2 — в точках A_1 и B_1 соответственно. Пусть X — произвольная точка плоскости, не лежащая на данных прямых a, b и окружностях γ_1, γ_2. Окружности, описанные вокруг треугольников ATX и BTX, пересекают окружность γ_2 в точках A_2 и B_2 соответственно. Докажите, что прямые TX, A_1B_2 и A_2B_1 пересекаются в одной точке.

Решение. См. рис. 2. Пусть прямая A_2B_1 вторично пересекает окружность ATX в точке Y. Тогда для направленных углов между прямыми имеем

$$\angle(AX, a) = \angle(AY, AT) = \angle(YA_2, A_2T) = \angle(B_1A_2, A_2T) = \angle(B_1A_1, A_1T) = \angle(B_1A_1, a),$$

то есть прямые AY и A_1B_1 параллельны. Но прямые AB и A_1B_1 параллельны из гомотетичности окружностей с центром в точке T, так что Y лежит на AB. Аналогично, вторая точка Z пересечения прямой A_1B_2 с окружностью BTX лежит на AB. Тогда из параллельности $ABYZ \parallel A_1B_1$ и вписанности четырехугольника $A_2B_1A_1B_2$ получаем

$$\angle(ZY, ZB_2) = \angle(B_1A_1, A_1B_2) = \angle(B_1A_2, A_2B_2) = \angle(A_2Y, A_2B_2),$$

то есть точки A_2, B_2, Y, Z лежат на одной окружности. Но тогда прямые TX, A_1B_2,

A_2B_1 суть радикальные оси этой окружности и окружностей ATX, BTX, откуда и следует и утверждение задачи.

9. (8) Положительные числа a, b, c и d таковы, что $a+b+c+d=1$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{(1+b)(1-c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1-d)}+\frac{c^3}{(1+d)(1-a)}+\frac{d^3}{(1+a)(1-b)}\geqslant\frac{1}{15}$$

Решение. Рассмотрим неравенство

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i^3)(\sum_{i=1}^{n}y_i^3)(\sum_{i=1}^{n}z_i^3)\geqslant(\sum_{i=1}^{n}x_iy_iz_i)^3,$$

которое верно для положительных значений переменных. Это неравенство доказывается, например из соображений однородности. Достаточно домножить все иксы на свой коэффициент так, чтобы сумма их кубов стала равна 1, потом то же сделать с игреками и с зетами, а затем оценить слагаемые из левой части по неравенству о средних для трех чисел $x_iy_iz_i\leqslant(x_i^3+y_i^3+z_i^3)/3$. Умножив наше неравенство на множители

$$5=(1+a)+(1+b)+(1+c)+(1+d)=(\sqrt[3]{1+a})^3+(\sqrt[3]{1+b})^3+(\sqrt[3]{1+c})^3+(\sqrt[3]{1+d})^3$$

и на

$$3=(1-a)+(1-b)+(1-c)+(1-d)=(\sqrt[3]{1-a})^3+(\sqrt[3]{1-b})^3+(\sqrt[3]{1-c})^3+(\sqrt[3]{1-d})^3$$

и применив написанное выше неравенство, получаем требуемое.

10. (9) В ряд стоит 2012 блюдечек, пронумерованных от 1 до 2012. На k-ом блюде лежит ровно k орехов. Двое играют в игру. За ход разрешается переложить любое

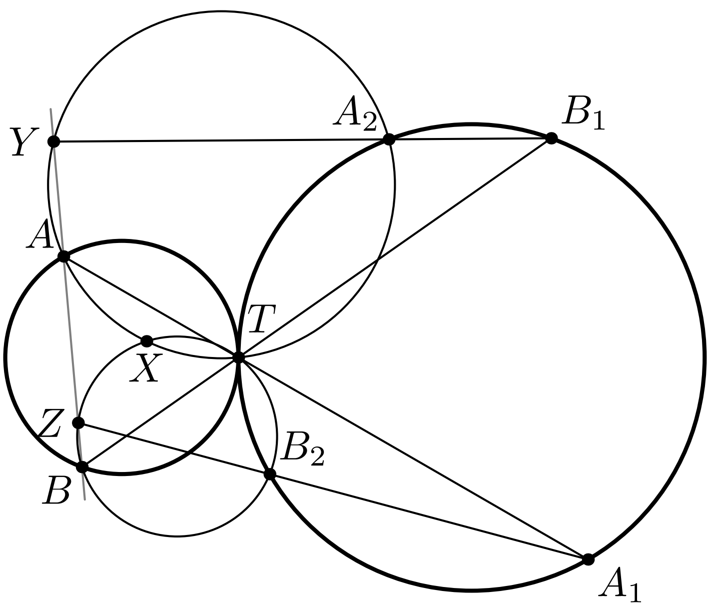

Рис. 2: К задаче 8

число (не меньше одного) орехов с m-го блюда на $(m-1)$-ое (где m выбирается от 2 до 2012 на усмотрение игрока), либо забрать с первого блюда любое число (тоже не меньше одного) орехов. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Рассмотрим теорию игры Ним. Пусть имеются кучки с a_1, a_2, …, a_n камнями. За ход разрешается брать из любой кучи любое число камней. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Отметим, что это игра конечна, так как не более чем за $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ходов все камни будут взяты. Это означает, что позиции в ней могут быть проанализированы. Изучим структуру выигрышных и проигрышных позиций в этой игре. Для этого введем в рассмотрение операцию $\oplus$. Пусть два числа x и y представлены в двоичной системе счисления и при этом в их записи поровну разрядов (для этого, если нужно в начало меньшего числа напишем нули). Сложим эти числа побитно (без переносов) и результат (также число в двоичной системе) будем обозначать через $x \oplus y$ (это сложение — аналог операции XOR в программировании). Докажем следующую (интересную саму по себе) теорему:

Теорема. Проигрышные позиции в игре Ним, это в точности такие наборы количеств камней в кучах a_1, a_2, …, a_n, что $a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \ldots \oplus a_n = 0$.

Докажем, что это так, индукцией по суммарному количеству камней во всех кучах. Вспомним, во-первых, что выигрышные позиции это такие, из которых есть ход в проигрышную позицию, а проигрышные позиции — это такие, из которых любой ход ведет в выигрышную (терминология обусловлена тем, что начинающей с проигрышной позиции проигрывает, а с выигрышной — выигрывавает). Будем доказывать, что описанные в формулировке позиции — это в точности все проигрышные. Заметим, что позиция, в которой во всех кучах ноль камней, проигрышная (из нее нельзя сделать ход) и при этом $\oplus$-сумма как раз равна нулю. Теперь покажем, что любой ход из позиции, в которой сумма $a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n$ равна 0 ведет в позицию, в которой эта сумма не ноль. Пусть мы взяли k камней из первой кучи. Заметим, что в двоичном разложении числа $a_1 - k$ не могут быть единицы на тех же местах, что и в числе a_1, так как иначе бы оно было не меньше исходного. Отсюда мы получаем, что новая позиция выигрышная по предположению индукции. Теперь рассмотрим позицию, в которой сумма $a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n$ не равна 0. Покажем, что можно сделать ход так, чтобы она стала нулем. Для этого найдем наибольший разряд (двоичного разложения), в котором побитная сумма не ноль. Значит есть кучки, у которых в двоичном представлении в этом разряде тоже единица. Пусть такая кучка — это a_1. Изменим ее следующим образом: обнулим тот (самый большой) разряд, в котором $\oplus$–сумма не ноль и изменим все биты, в которых так же $\oplus$–сумма была не ноль. Новая сумма будет ноль, и, кроме того, ясно, что мы уменьшили кучу a_1. Таким образом, мы доказали по индукции теорему.

Теперь рассмотрим игру Ним с пополнением. Отличие от обычной игры состоит в том, что кучи можно как уменьшать, так и увеличивать. Ясно, что если не вводить никаких ограничений на ходы, увеличивающие кучи, то такая игра не будет конечной. Будем считать, что есть (какое-то любое) ограничение, из которого следует, что число увеличивающих ходов будет конечно. Тогда такая игра совершенно не отличается от рассмотренной, мы просто на все ходы, увеличивающие кучки, будем отвечать уменьшением на то же число, на которое только что увеличил другой игрок. Таким образом, в такой игре проигрышные позиции описываются аналогично. Наконец сведем нашу игру к описанной выше игре Ним с увеличениями. Для этого мы будем рассматривать только блюдца с нечетными номерами, а на блюдца с четными номерами не будем обращать внимание. Заметим, что наша игра конечна (полуинвариантом является, например, сумма номеров блюдец, посчитанная по всем орехам — ясно что такая сумма целая и с каждым ходом уменьшается). Значит в нашей игре будет всего лишь конечно число ходов и тем более лишь конечное число ходов из блюдца с четынми номером в блюдца с нечетными. Такой ход мы будем рассматривать просто как увелечение. Тогда мы просто свели игру к игре Ним на кучках 1, 3, $\ldots$, 2011. Посчитаем побитную сумму этих чисел. Их 1006 и все они нечетны, значит в последнем разряде сумма ноль. Вычтем из всех чисел 1 и поделим на 2. Получим числа от 0 до 1005. Их сумма нечетна, и значит у исходных чисел сумма во втором разряде не ноль. Значит эта позиция выигрышная и выиграет первый игрок.