Личная письменная олимпиада «Геометрия»

Младшая лига

1. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в ее середине M. Так же известно, что $\angle BDC = 90^\circ$. Найдите углы параллелограмма $ABCD$.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали перпендикулярны. Точки K и L на боковых сторонах AB и CD соответственно таковы, что отрезок KL проходит через точку пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ и параллелен ее основаниям. На боковой стороне AB отмечена точка M такая, что $AM = BK$. Докажите, что $LM = AB$.

3. Вписанная окружность равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ касается его боковых сторон BC и AB в точках E и F. Через точку A проведен внутри угла EAB луч, пересекающий вписанную окружность в точках P и Q. Прямые EP и EQ пересекают прямую AC в точках P' и Q'. Докажите, что $P'A = Q'C$.

4. Верно ли, что любой треугольник площади 3 можно покрыть выпуклым многоугольником площади 5, имеющим ось симметрии?

Старшая лига

1. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На гипотенузе AB отмечена ее середина M. На стороне CB выбрана точка Q такая, что $\dfrac{BQ}{QC} = 2$. Докажите, что $\angle QAB = \angle QMC$.

2. Вписанная окружность равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ касается его боковых сторон BC и AB в точках E и F. Через точку A проведен внутри угла EAB луч, пересекающий вписанную окружность в точках P и Q. Прямые EP и EQ пересекают прямую AC в точках P' и Q'. Докажите, что $P'A = Q'C$.

3. Внутри тетраэдра $ABCD$ выбрана произвольная точка P. Обозначим радиус описанной сферы этого тетраэдра через R, а расстояние от точки P до центра этой сферы через x. Докажите неравенства

$$(R + x) \cdot (R - x)^3 \leqslant PA \cdot PB \cdot PC \cdot PD \leqslant (R + x)^3 \cdot (R - x).$$

4. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Центр вневписанной окружности треугольника, касающейся стороны BC треугольника, обозначим через I_A, а точку ее касания с этой стороной — через A_1. Аналогично определим точки I_B, I_C, B_1, C_1. Докажите, что описанные окружности треугольников AI_AA_1, BI_BB_1 и CI_CC_1 имеют две общие точки.