Личная устная олимпиада «Комбинаторика и логика» (с решениями)

Младшая лига

1. За круглым столом сидели четыре студента. Филолог сидел против Лу́зина, рядом с историком. Математик сидел рядом с Лебедевым. Соседи Лихачёва — Соловьёв и физик. Какая профессия у Лузина?

Ответ: Математик. *Решение.* Лузин не может быть ни филологом (так как сидел напротив), ни историком (с которым сидел рядом). Значит, он либо физик, либо математик. Если Лузин физик, то Лихачёв сидел между физиком Лузиным и филологом Соловьёвым. Но тогда математик не может сидеть рядом с Лебедевым — противоречие. Значит, Лузин — математик. Можно убедиться, что в этом случае все сходится. Действительно, физик не Лихачёв, не Соловьёв и не Лузин — значит, Лебедев. Рядом с Лихачёвым нет Лузина, значит, Лихачёв напротив Лузина, то есть он — филолог. Тогда Соловьёв — историк, и сидят они в таком порядке: математик Лузин, физик Лебедев, филолог Лихачёв и историк Соловьёв.

2. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 2012. Петя стирает их по одному. Докажите, что он может делать это в таком порядке, чтобы сумма нестертых чисел всегда была составным числом.

Решение. Заметим, что сумма $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$ — составное число при $n > 2$. Поэтому будем вычеркивать каждый раз самое большое число, пока не останутся 1, 2, 3 и 4. Далее вычеркиваем по порядку 1, 3, 2, оставляя соответственно суммы 9, 6, 4.

3. Дан произвольный треугольник. На каждой стороне треугольника отмечено 10 точек. Каждая вершина треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками противолежащей стороны. На какое наибольшее число частей отрезки могли разделить треугольник?

Ответ: 331. *Решение.* Будем проводить отрезки по одному. Число добавленных частей равно числу частей, на которые разбивается отрезок точками пересечения. Значит, чем больше точек пересечения, тем больше частей. Максимум частей будет, когда каждый отрезок пересекает каждый из отрезков, проведенный из других вершин, причем в своей точке. Для этого достаточно проводить отрезки не через имеющиеся точки пересечения. Для 10 отрезков из первой вершины каждый добавит по одной части. Для 10 отрезков из второй вершины на каждом будет по 10 точек пересечения, значит, каждый добавит по 11 частей. Для 10 отрезков из третьей вершины на каждом будет по 20 точек пересечения, значит, каждый добавит по 21 частей. Итого, $1 + 10 + 10 \cdot 11 + 10 \cdot 21 = 331$.

4. Паули и Бор играют в следующую игру. Имеется куча из 99! молекул. За один ход из кучи разрешается взять не более, чем 1% от оставшихся молекул. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Ходят поочередно, начинает Паули. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ: Паули. *Решение.* Рассмотрим игру по тем же правилам для кучи с $99!-1$ молекулой (назовем эту игру *меньшей*). Поскольку игра закончится за конечное число ходов и ничьих нет, то у одного из игроков есть выигрышная стратегия. Возможны два случая.
(1) В меньшей игре выигрывает второй. Тогда в исходной игре Паули первым ходом берет одну молекулу. Тем самым он сведет ситуацию к меньшей игре, где ходит вторым, и поэтому выиграет.
(2) В меньшей игре выигрывает первый, взяв первым ходом x камней. Тогда по условию $x \leqslant \frac{99!-1}{100}$. Так как 99! кратно 100, то $x+1 \leqslant \frac{99!}{100}$. Это значит, что в исходной игре Паули имеет право первым ходом взять $x+1$ камень. Тогда он попадет в ситуацию после выигрышного хода первого игрока в меньшей игре. Действуя далее как этот игрок, он выиграет.

5. Секретный объект представляет собой в плане квадрат 40×40 м, разбитый коридорами на квадратики 5×5 м. В каждой вершине такого квадратика — выключатель. Щелчок выключателя действует сразу на все выходящие из этой вершины пятиметровые коридоры, меняя их освещенности на противоположные. Сторож находится в углу полностью неосвещенного объекта. Он может ходить только по освещенным коридорам и щелкать выключателями любое число раз. Может ли он добиться того, чтобы от любого выключателя к любому другому он мог пройти, не щелкая выключателями?

Ответ: нет. *Решение.* Ясно, что сторож не может осветить все коридоры — последним щелчком он выключит свет в коридоре, по которому пришел в узел. Раскрасим узлы в шахматном порядке в черный и белый цвета. Чтобы коридор был освещен, необходимо и достаточно, чтобы на одном его конце выключателем щелкнули четное число раз, а на другом — нечетное. Допустим, нам удалось осветить объект как требуется в условии. Двигаясь от узла к узлу по освещенным коридорам, мы будем чередовать цвет и четность, поэтому все узлы одинакового цвета будут иметь одинаковую четность, а разного — разную. Но тогда концы каждого коридора — разной четности, то есть будут освещены все коридоры — противоречие.

Старшая лига

1. 77 жителей острова лжецов и рыцарей стали в круг. Всем известно, что их веса различны. На вопрос «У тебя есть сосед-лжец легче тебя?» все ответили «Да». После перерыва они стали в круг в другом порядке. Докажите, что на вопрос «У тебя есть сосед-рыцарь легче тебя?» как минимум двое ответят «Да».

Решение. Самый легкий житель в круге солгал, поэтому он лжец. Но тогда он так же солжет, сказав «Да» и во второй раз. В круге нет соседей-лжецов, иначе более тяжелый из них ответил бы «Нет» на первый вопрос. Значит, в круге одинокие лжецы чередуются с группами из подряд идущих рыцарей. Ясно, что групп рыцарей столько же, сколько лжецов. Поэтому рыцарей не меньше, чем лжецов, а ввиду нечетности — больше. Тогда есть группа из не менее чем двух рыцарей. Более тяжелый из них на второй вопрос ответит «Да».

2. По кругу стоит 101 блюдце, на каждом по конфете. Сначала Малыш выбирает натуральное $m < 101$ и сообщает его Карлсону, затем Карлсон — натуральное $k < 101$. Малыш берет конфету с любого блюдца. Отсчитав от этого блюдца k-е блюдце по часовой стрелке, Карлсон берет с него конфету. Отсчитав уже от этого блюдца m-е блюдце по часовой стрелке, Малыш берет с него конфету (если она там еще есть). Отсчитав от блюдца Малыша k-е блюдце по часовой стрелке, Карлсон берет с него конфету (если она там еще есть), и т. д. Какое наибольшее число конфет может гарантировать себе Карлсон?

Ответ: 99. *Решение.* Карлсону достаточно взять $k = 101 - 2m$ (при $m < 51$) или $k = 202 - 2m$ (при $m \geqslant 51$). Тогда Карлсон фактически отсчитывает $2m$ против часовой стрелки. Обозначив первое блюдце Малыша через 0, далее указываем номер при отсчете от него против часовой стрелки. Тогда Малышу достаются блюдца 0, m, $2m$, $3m$, …, а Карлсону — $2m$, $3m$, $4m$, … . Как видим, начиная с третьего хода Малышу достается блюдце, опустошенное Карлсоном 2 хода назад. Поэтому больше двух конфет Малыш не получит. С другой стороны, ввиду простоты числа 101 числа m и 101 взаимно просты, поэтому среди чисел $2m$, $3m$, $4m$ встретятся всевозможные остатки по модулю m. Значит, конфеты будут взяты со всех блюдец, поэтому Карлсон захватит $(101 - 2)$ конфеты.

3. От таблицы результатов однокругового футбольного турнира 10 команд осталось только суммарное количество забитых и пропущенных мячей для каждой команды. Математику этого хватило, чтобы восстановить счёт в каждом матче. Какое наименьшее количество из этих 20 чисел могло быть нулями?

Ответ: 0. *Решение.* Если общее количество мячей, забитых командой A, равно суммарному количеству мячей, пропущенными остальными командами, и то же верно для пропущенных командой A и суммой забитых остальными, то все мячи были забиты и пропущены только в матчах с командой A. Тогда напротив всех, кроме A, стоит счет во встрече с командой A, а все остальные встречи завершились `0:0`.

4. В вершинах выпуклого многогранника с n вершинами записано по два положительных числа: синее и красное, причем сумма синих равна сумме красных. За один ход можно изменить два синих числа в концах любого одного ребра так, чтобы чтобы они остались положительными и сумма сохранилась. Докажите, что не более чем за $n-1$ ход можно добиться, чтобы в каждой вершине синее число стало равно красному.

Решение. Поскольку граф многогранника связен, достаточно доказать для остовного дерева. Индукция по n. Пусть висячая вершина A связана ребром с вершиной B, синие и красные числа — это c и k в A, c' и k' в B. Возможны 3 случая.
(1) $c=k$. Тогда выкинем A и ребро AB.
(2) $c>k$. Заменим c и c' на k и $c'+c-k$, после чего выкинем A и ребро AB.
(3) $c<k$. Временно выкинем A и ребро AB и заменим k' на $k'+k-c$. Теперь в оставшемся графе суммы синих и красных равны. Добьемся равенства всех синих и красных не более чем за $n-2$ шага. Вернем на место A и ребро AB и восстановим значение k'. Последним ходом заменим на ребре AB синие числа c и $k'+k-c$ на k и k'.

5. Даны натуральные числа r и n, $r \leqslant n$. Рассматриваются всевозможные упорядоченные наборы $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ неотрицательных целых чисел, такие, что $k_1+k_2+\ldots+k_n=r$, $k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n$. Для каждого набора вычислена дробь $\frac{1}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$ (напомним, что $0!=1$). Докажите, что сумма этих дробей равна $\frac{(n-1)!}{(n-r)!r!(r-1)!}$.

Первое решение. Рассмотрим все разбиения числа n в сумму r натуральных слагаемых с учетом порядка. Их ровно $C_{n-1}^{r-1}=\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}$ (берем палочку длины n, разбитую на единичные отрезки $n-1$ точкой, и из них выбираем $r-1$, по которым режем на r частей). С другой стороны, если в таком разбиении k_1 единиц, k_2 двоек и так далее, то $\sum k_i=r$, $\sum ik_i=n$, а количество разбиений в точности $\frac{r!}{\prod k_i!}$ (выпишем наши r слагаемых считая их как бы различными — это можно сделать $r!$ способами; а потом вспомним, что от порядка, допустим, единиц на деле ничего не зависит).

Второе решение. Рассмотрим перестановки $\pi \in S_n$ с ровно r циклами, в каждом из которых помечен один элемент. Иными словами, у нас будет r ориентированных окружностей, на них выписаны в совокупности по разу числа от 1 до n, и на каждой окружности одно число отмечено. Порядок окружностей роли не играет. Если зафиксировать количество k_i циклов длины i (окружностей с ровно i числами), то таких помеченных перестановок будет $\frac{n!}{\prod k_i!}$ (берем любую перестановку и выписываем в ряд элементы ее циклов, циклы берутся по возрастанию длины, в каждом цикле элементы выписываются начиная с отмеченного. Например, для перестановки $(7)(3)(6)(12)(45)$ с отмеченными элементами 7, 3, 6, 2, 4 мы получим перестановки 3762145, 6734521 и так далее, всего $\prod k_i!$ перестановок. Но любая перестановка чисел от 1 до n будет выписана ровно один раз, так что $N\prod k_i! = n!$, где N есть число рассматриваемых помеченных перестановок.) Мы хотим доказать, что общее число таких помеченных перестановок равно $C_n^r r(r+1)\ldots(n-1)$. Фиксируем r отмеченных элементов, каждый поставим на свою окружность. Берем первый еще не поставленный на окружности элемент x, его можно поставить в r мест (одно место на каждой окружности). Для второго элемента есть уже $r+1$ место, и так далее.