Личная письменная олимпиада «Алгебра и теория чисел» (с решениями)

Младшая лига

1. Найдите наименьшее натуральное число, дающее попарно различные остатки при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Решение. Изучим все числа, которые обладают таким свойством. Обозначим рассматриваемое нами число с данным свойством через N. Если такое число четное, то его остаток от деления на 4 — это 2. Тогда остаток от деления на 6 — это 4, $\ldots$, остаток от деления на 10 — это 8. Тогда остаток от деления на 3 — это 1, от деления на 5 — это 3, и т. д. Таким образом, если N четное, то $N+2$ делится на все числа от 2 до 10, и значит $N \geqslant [2,3,\ldots,10]-2$. Теперь пусть N нечетно. Аналогично получаем, что N дает остаток 3 от деления на 4, остаток 5 от деления на 6 и т. д. Далее N дает остаток 2 от деления на 3 (так как N дает остаток 5 от деления на 6) и остаток 4 от деления на 5. Остаток от деления на 9 может быть равен только 8 (так как N не делится на 3 и нечетные остатки заняты), а для остатка от деления на 7 остаются 2 варианта: 0 и 6. В первом случае $N+1$ делится на все числа от 2 до 10, и значит $N \geqslant [2,3,\ldots,10]-1$. Во втором получаем, что $N+1$ кратно $[2,3,4,5,6,8,9,10] = 360$ и дает остаток 1 от деления на 7. Наименьшее такое число — это 1800, и значит $N = 1799$ будет ответом.

2. Последовательность $\{a_n\}$ определена рекуррентно: $a_1 = \frac{1}{2}$ и $a_n = \frac{a_{n-1}}{2n\cdot a_{n-1}+1}$ для $n>1$. Найдите сумму $a_1+a_2+\ldots+a_{2012}$.

Ответ: $\frac{2012}{2013}$. *Решение.* Введем в рассмотрение последовательность $b_n = \frac{1}{a_n}$. Для нее рекуррентное соотношение переписывается в виде $b_n = b_{n-1}+2n$. Значит $b_n = 2+4+\ldots+2n = n(n+1)$, откуда $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Складывая такие числа по всем n от 1 до 2012 получаем, что сумма равна $\frac{2012}{2013}$.

3. Вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что

$$a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \geqslant m + (m+1) + \ldots + n$$

при всех натуральных $m \leqslant n$. Докажите, что $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

Решение. Обозначим через b_k разность $a_k - k$. Тогда $a_k = b_k + k$ и $a_k^2 = b_k^2 + 2kb_k + k^2$. Теперь $\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2 + 2\sum_{k=1}^n kb_k + \sum_{k=1}^n k^2$. Заметим, что первая сумма не меньше нуля, третья сумма — это то, чем нам нужно оценить. Значит достаточно доказать, что $\sum_{k=1}^{n} kb_k$ неотрицательно. Заметим, что $\sum_{k=1}^{n} kb_k = \sum_{k=1}^{n}(b_k + b_{k+1} + \ldots + b_n) \geqslant 0$ по условию.

4. Найдите все такие пары натуральных чисел (a, b), что a^2 делится на b, b^2 делится на a и $(b+1)^2$ делится на $a+1$.

Решение. Обозначим через d наибольший общий делитель чисел a и b. Пусть $a = a_1 d$ и $b = d_1 b$. Тогда по условию $b_1^2 d^2$ делится на $a_1 d$, откуда (так как a_1 и b_1 взаимно просты) ясно, что d делится на a_1. Аналогично d делится на b_1 и, значит, $d = a_1 b_1 k$ (мы еще раз воспользовались взаимной простотой чисел a_1 и b_1). Тогда $a = a_1^2 b_1 k$ и $b = b_1^2 a_1 k$. Подставив эти равенства в последнее условие, получим, что $b_1^4 a_1^2 k^2 + 2b_1^2 a_1 k + 1$ делится на $a_1^2 b_1 k + 1$. Вычтем второе число из первого и сократим на $b_1 k$. Тогда получаем, что $b_1^3 a_1^2 k + 2a_1 b_1 - a_1^2$ делится на $a_1^2 b_1 k + 1$. Заменим теперь $a_1^2 b_1 k$ на -1 в первом слагаемом выражения $b_1^3 a_1^2 k + 2a_1 b_1 - a_1^2$ и получим, что $-(a_1 - b_1)^2$ делится на $a_1^2 b_1 k + 1$. Теперь отбросим минус у делимого (он не влияет на делимость) и рассмотрим несколько случаев. Во-первых, если $a_1 = b_1$, то очевидно $a = b$ и такой случай подходит. Если $a_1 > b_1$, то имеем неравенства $a_1^2 b_1 k + 1 > a_1^2 \geqslant (a_1 - b_1)^2$, что противоречит делимости. Тогда остается случай $b_1 > a_1$. Из неравенства $b_1^2 > (b_1 - a_1)^2 > a_1^2 b_1$ получаем, что $b_1 > a_1^2$. По модулю b_1 число $(b_1 - a_1)^2$ сравнимо с a_1^2, которое, в свою очередь, меньше, чем b_1. Если записать $(b_1 - a_1)^2 = t(a_1^2 b_1 k + 1)$ и посмореть на это равенство по модулю b_1, а также вспомнить, что $t < b_1$, то можно понять, что $t = a_1^2$. Отсюда мы выводим, что $b_1 - 2a_1 = a_1^4 k$. Значит b_1 делится на a_1, откуда (опять же, в силу взаимной простоты) ясно, что $a_1 = 1$. Тогда $b_1 = k + 2$ и мы получаем серию решений $a = k(k+2)$ и $b = k(k+2)^2$ для всех натуральных k.

Старшая лига

1. Функция $f(x)$, определенная при всех вещественных x, удовлетворяет равенствам $f(x) = f(x + T_1)$ при всех $x > A_1$ и $f(x) = f(x + T_2)$ при всех $x > A_2$, где T_1, T_2 — данные положительные числа, A_1, A_2 — данные вещественные числа. Докажите, что $f(x) = f(x + T_2)$ при всех $x > A_1$.

Решение. Если $A_1 \geqslant A_2$, то это очевидно. В противном случае при всех $x > A_1$ выполнено равенство:

$$f\left(x + \left\lceil \frac{A_2 - A_1}{T_1} \right\rceil T_1\right) = f\left(x + \left\lceil \frac{A_2 - A_1}{T_1} \right\rceil T_1 + T_2\right)$$

(где за $\lceil w \rceil$ обозначено наименьшее целое число, не меньшее w), так как

$$x + \left\lceil \frac{A_2 - A_1}{T_1} \right\rceil T_1 \geqslant x + A_2 - A_1 > A_1 + A_2 - A_1 = A_2.$$

Однако

$$f(x)=f(x+T_1)=f(x+2T_1)=\ldots=f\left(x+\left\lceil\frac{A_2-A_1}{T_1}\right\rceil T_1\right),$$

и аналогично

$$f(x+T_2)=f\left(x+\left\lceil\frac{A_2-A_1}{T_1}\right\rceil T_1+T_2\right).$$

Поэтому $f(x)=f(x+T_2)$.

2. Натуральное число $k>2$ и вещественные числа a, b таковы, что многочлен x^k+ax+1 делится на многочлен x^2+bx+1. Докажите, что $a(a-b)=0$.

Первое решение. Обозначим $P(x)=x^2+bx+1$. Пусть $a\neq 0$, иначе очевидно, что $a(a-b)=0$. По теореме Виета корни (возможно, комплексные) многочлена $P(x)$ в произведении дают единицу. Обозначим их через u и $\frac{1}{u}$. Тогда из делимости первого многочлена на второй следует, что $u^k+au+1=1/u^k+a/u+1=0$. Отсюда $-a=(u^k+1)/u=(u^k+1)/u^{k-1}$, то есть $u^{k-2}=1$, $u^2+bu+1=0=u^k+au+1=u^2+au+1$, $a=b$.

Второе решение. Обозначим $P(x)=x^2+bx+1$. Пусть $a\neq 0$, иначе очевидно, что $a(a-b)=0$. Если x^k+ax+1 делится на $P(x)$, то $x^k+ax^{k-1}+1$ тоже делится на $P(x)$. Тогда их разность $ax^{k-1}-ax$ делится на $P(x)$, а значит и $x^{k-2}-1$ делится на $P(x)$. Остаток при делении $x^k+ax^{k-1}+1$ на $x^{k-2}-1$ равен x^2+ax+1, и он тоже будет делится на $P(x)$. Из $x^2+bx+1\mid x^2+ax+1$ следует $a=b$.

3. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_0=1$, $x_1=1$, $x_{n+1}=2x_n+x_{n-1}$ при $n\geqslant 1$. Докажите, что если число x_n — простое, то n — либо степень числа 2, либо простое.

Решение. Заметим, что последовательность $y_n=(\alpha^n+\beta^n)/2$, где $\alpha=1+\sqrt{2}$ и $\beta=1-\sqrt{2}$, подходит условию; также очевидно, что последовательность, подходящая условию, единственна, поэтому $x_n=y_n$ для всех n. Допустим, что y_n просто при некотором n, и n не простое число и не является степенью двойки. Тогда n имеет такой нечетный делитель $k>1$, что $l=n/k>1$. Из условия очевидно, что последовательность x_n строго возрастает, поэтому $x_n>x_l>1$.

$$\frac{\alpha^n+\beta^n}{2}=\frac{(\alpha^l)^k+(\beta^l)^k}{2}=$$
$$=\frac{\alpha^l+\beta^l}{2}\cdot\left(\alpha^{l(k-1)}\beta^l+\alpha^{l(k-2)}\beta^{2l}+\ldots+\alpha^l\beta^{l(k-1)}\right)=x_l\cdot X.$$

Заметим, что X является симметрическим многочленом от α и β с целыми коэффициентами, поэтому выражается через $\alpha+\beta=2$ и $\alpha\beta=-1$ с целыми коэффициентами, значит, является целым. Отсюда простое x_n делится на x_l, что входит в противоречие с неравенством $x_n>x_l>1$.

4. Найдите наименьшее положительное C такое, что неравенство

$$\frac{x}{\sqrt{yz}}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{y}{\sqrt{zx}}\cdot\frac{1}{y+1}+\frac{z}{\sqrt{xy}}\cdot\frac{1}{z+1}\leqslant C$$

выполнено для любых положительных чисел x, y, z, удовлетворяющих равенству

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1.$$

Решение. Сделаем замену: $a=1/(x+1)$, $b=1/(y+1)$, $c=1/(z+1)$, откуда $x=(1-a)/a$, $y=(1-b)/b$, $z=(1-c)/c$, $a+b+c=1$,

$$\frac{x}{\sqrt{yz}}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{y}{\sqrt{zx}}\cdot\frac{1}{y+1}+\frac{z}{\sqrt{xy}}\cdot\frac{1}{z+1}=$$

$$=(1-a)\sqrt{\frac{bc}{(1-b)(1-c)}}+(1-b)\sqrt{\frac{ca}{(1-c)(1-a)}}+(1-c)\sqrt{\frac{ab}{(1-a)(1-b)}}=W.$$

Возьмем $a=b=\varepsilon, c=1-2\varepsilon$. Тогда

$$W=\sqrt{2}(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon}}+\frac{2\varepsilon^2}{1-\varepsilon}>\sqrt{2}(1-\varepsilon)\frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon}=\sqrt{2}(1-2\varepsilon).$$

Если $0<D<\sqrt{2}$, то приняв $\varepsilon=(1-D/\sqrt{2})/2$, получим, что $W>D$. Поэтому требуемое C больше или равно $\sqrt{2}$.

Докажем, что W всегда не превосходит $\sqrt{2}$. Без ограничения общности, c является наибольшим среди чисел a, b, c. Заметим, что следующие неравенства верны:

$$(1-a)\sqrt{\frac{bc}{(1-b)(1-c)}}=(1-a)\sqrt{\frac{b}{1-c}\cdot\frac{c}{a+c}}\leqslant(1-a)\sqrt{\frac{b}{1-c}},$$

$$(1-b)\sqrt{\frac{ca}{(1-c)(1-a)}}=(1-b)\sqrt{\frac{a}{1-c}\cdot\frac{c}{b+c}}\leqslant(1-b)\sqrt{\frac{a}{1-c}},$$

$$a\sqrt{\frac{ab}{(1-a)(1-b)}}=a\sqrt{\frac{b}{1-a}\cdot\frac{a}{a+c}}\leqslant a\sqrt{\frac{b}{1-c}},$$

$$b\sqrt{\frac{ab}{(1-a)(1-b)}}=b\sqrt{\frac{a}{1-b}\cdot\frac{b}{b+c}}\leqslant a\sqrt{\frac{a}{1-c}}.$$

Если их сложить, получим, что

$$W\leqslant\sqrt{\frac{a}{1-c}}+\sqrt{\frac{b}{1-c}}.$$

Заметим, что сумма подкоренных выражений равна 1, поэтому по неравенству между средним арифметическим и средним квадратическим имеем, что

$$W\leqslant 2\sqrt{1/2}=\sqrt{2}.$$

Поэтому $C\leqslant\sqrt{2}$, а значит $C=\sqrt{2}$.